MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

16.10.2018

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5: (Wiederholung zur numerischen Quadratur)

Konstruieren Sie folgende Quadraturformeln mit Knoten c_i und Gewichten b_i für das Intervall $[0, 1]$:

(a) eine zweistufige Quadraturformel maximaler Ordnung mit $c_1 = 0$,

(b) eine zweistufige Quadraturformel maximaler Ordnung mit $c_2 = 1$,

(c) eine zweistufige, symmetrische Quadraturformel maximaler Ordnung und bestimmen Sie die Ordnung und

(d) die 3-stufige Quadraturformel maximaler Ordnung mit den Knoten $c_1 = 0$, $c_3 = 1$ und Gewichtsfunktion $\omega(t) = 1/\sqrt{t}$ und geben Sie die Ordnung an.

Aufgabe 6:

Beweisen Sie Lemma (2.21) der Vorlesung: Für die intervallweise Kondition

$$\kappa[t_0, t] = \max_{s\in[t_0,t]} ||W(s, t_0)||$$

gilt:

(i) $\kappa[t_0, t_0] = 1$,

(ii) $\kappa[t_0, t_1] \geq 1$,

(iii) $\kappa[t_0, t_1] \leq \kappa[t_0, t_2]$ für $t_1 \leq t_2$,

(iv) $\kappa[t_0, t_2] \leq \kappa[t_0, t_1]\kappa[t_1, t_2]$ für $t_1 \in [t_0, t_2]$.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie Lemma 2.7 der Vorlesung:

Ist $y : t \mapsto y(t)$ Lösung des AWPs

$$\dot{y} = f(y);\ \ y(t_0) = y_0,$$

so ist $y_\tau : t \mapsto y(t - \tau)$ Lösung des AWPs

$$\dot{y} = f(y);\ \ y(t_0 + \tau) = y_0.$$

Hinweis: Das bedeutet, dass man bei einem autonomen Anfangeswertproblem, ohne Einschränkung die Anfangszeit t_0 auf "0" setzen kann.

Aufgabe 8:

Gegeben Sie das Butcher Tableau zum Verfahren von Heun an.

Erinnerung: Ein Schritt des Verfahrens von Heun ist durch

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4}\left(f(t_0, y_0) + 3f\left(t_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}hf\left(t_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{h}{3}f(t_0, y_0)\right)\right)\right)$$

gegeben.

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 22.10.2018.