MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

22.1.2019

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 14. Übungsblatt

Aufgabe 50:

Zeigen Sie:
Ein exponentielles Runge-Kutta-Verfahren erhält genau dann Gleichgewichtspunkte des autonomen Problems $y'(t) = Ay(t) + g(y(t))$ (es gilt also $Y_{ni} = y_n = y^*$), wenn die vereinfachten Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{s} b_j(z) = \varphi_1(z)$$

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij}(z) = c_i\varphi_1(c_i z),\ i = 1, \ldots, s$$

erfüllt sind.

Aufgabe 51:

Zeigen Sie, dass exponentielle Runge-Kutta-Verfahren, welche die vereinfachten Bedingungen erfüllen (Aufgabe 50), invariant unter einer Transformation auf autonome Form sind.

Aufgabe 52:

Definiert seien folgende ganze Funktionen:

$$\varphi_0(z) = e^z \text{ und } \varphi_j(z) = \int_0^1 e^{(1-\tau)z} \frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!}\, \mathrm{d}\tau \text{ für } j \geq 1$$

Zeigen Sie:

$$\varphi_{k+1}(z) = \frac{\varphi_k(z) - 1/k!}{z} \quad \text{und} \quad \varphi_k(0) = \frac{1}{k!}, \quad \text{für } k \geq 0$$

Aufgabe 53:

Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$ und $\exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$. Zeigen Sie:

(a) $\exp(tA)$ konvergiert in der induzierten Matrixnorm.

(b) $\exp(0 \cdot A) = Id$ und $\exp((s+t)A) = \exp(sA)\exp(tA)$ für $s, t \in \mathbb{R}$.

(c) Für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent

(1) $AB = BA$

(2) $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Benutzen Sie für (2) $\Longrightarrow$ (1) zweite Ableitungen der auftretenden Funktionen.

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 28.1.2019.