MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

15.1.2019

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 13. Übungsblatt

Aufgabe 46:

Zeigen Sie, dass ein implizites Runge-Kutta-Verfahren mit paarweise verschiedenen Knoten c_i der Ordnung $p \geq s$ genau dann ein Kollokationsverfahren ist, wenn

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q} \qquad i = 1, \ldots, s,\ q = 1, \ldots, s \text{ gilt.}$$

Aufgabe 47:

Beweisen Sie analog zu Aufgabe 44, dass Radau-Kollokationsverfahren kontraktiv sind.

Hinweis: Schreiben Sie

$$d(t) = c(t - t_0)^{2s} + r(t), \qquad r \in \mathcal{P}_{2s-1}.$$

Zeigen Sie zunächst $c \geq 0$ und die Darstellung

$$d'(t) = 2sc(t - \tau_1)^2 \cdots (t - \tau_{s-1})^2 (t - \tau_s) + q(t),$$

mit $\tau_i = t_0 + c_i h$ und einem Polynom $q \in \mathcal{P}_{2s-2}$.

Aufgabe 48:

(a) Interpretieren Sie die implizite Mittelpunktsregel und das explizite Euler-Verfahren als Kollokationsverfahren.

(b) Ist die Trapezregel

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \left(f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1) \right)$$

ein Kollokationsverfahren?

Aufgabe 49:

(a) Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit symmetrisch verteilten Knoten: $c_i = 1 - c_{s+1-i}$ für $i = 1, \ldots, s$. Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt:

$$R(z) \cdot R(-z) = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{(mit Ausnahme der Pole)}\ .$$

Insbesondere ist $|R(z)| \equiv 1$ auf der imaginären Achse.

(b) Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit $0 < c_1 < \cdots < c_s = 1$. Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt:

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = 0\ .$$

Hinweise: Siehe nächste Seite.

Hinweis: zu (a): Zeigen Sie

$$a_{ij} = b_j - a_{s+1-i,s+1-j}.$$

Was bedeutet das in Matrixschreibweise?

zu (b): Nehmen Sie $t_0 = 0$ und $h = 1$ an und zeigen Sie

$$R(z) = \frac{M^{(s)}(1) + M^{(s-1)}(1)z + \ldots + M(1)z^s}{M^{(s)}(0) + M^{(s-1)}(0)z + \ldots + M(0)z^s}, \qquad M(x) = \prod_{j=1}^{s}(x - c_j)$$

indem Sie aus $u'(c_j) - zu(c_j) = 0$ eine Darstellung für $u^{(k)}(x)$ mit Hilfe von $M(x)$ herleiten.

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 21.1.2019.