Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Andreas Troll

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

8.1.2019

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 42:

Für eine Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ heißt y^* Gleichgewichtspunkt, falls $f(t, y^*) = 0$ für alle $t \geq 0$.

Zeigen Sie, dass ein Runge-Kutta-Verfahren Gleichgewichtspunkte erhält, d. h., dass $y_1 = y^*$ gilt, wenn man im Gleichgewichtspunkt $y_0 = y^*$ startet.

Aufgabe 43:

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathfrak{A}$ für Gaußkollokationsverfahren invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathfrak{A}$ für Radaukollokationsverfahren invertierbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie die W-Transformation $W^{-1}\mathfrak{A}W$ der Matrix $\mathfrak{A}$ und zeigen Sie, dass $\det(W^{-1}\mathfrak{A}W) > 0$ ist.

Aufgabe 44:

Für die Gauß-Kollokationsverfahren gibt es einen einfacheren Beweis der Kontraktivität bei Differentialgleichungen $y' = f(t, y)$ mit $\langle f(t, y) - f(t, \tilde{y}), y - \tilde{y}\rangle \leq 0$ für alle $t, y, \tilde{y}$. Seien dazu $u, \tilde{u}$ die Kollokationspolynome zu den Anfangswerten $y_0, \tilde{y}_0$, und sei $d(t) = \|u(t) - \tilde{u}(t)\|^2$. Es ist

$$\|y_1 - \tilde{y}_1\|^2 = d(t_1) = d(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} d'(t)\,dt \leq d(t_0) = \|y_0 - \tilde{y}_0\|^2.$$

Beweisen Sie die obige Ungleichung.

Hinweis: Polynome vom Grad ??? werden durch die Gauß'schen Quadraturformeln exakt integriert.

Aufgabe 45:

Zeigen Sie für Kollokationsverfahren: Falls alle Knoten c_i verschieden sind, so ist algebraische Stabilität notwendig für Kontraktivität.

Hinweis: Betrachten Sie Differentialgleichungen $y' = \lambda(t)y$ mit geschickt gewähltem $\lambda(t)$ (einmal reell, einmal rein imaginär).

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 14.1.2019.