MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

18.12.2018

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 38:

Überprüfen Sie ob das Runge-Kutta-Verfahren aus Aufgabe 35 A-stabil ist.

Aufgabe 39:

(a) Zeigen Sie, dass Differentialgleichungen, welche die Bedingung

$$Re\,\langle f(t,y) - f(t,z), y - z\rangle \leq 0 \tag{D}$$

erfüllen, kontraktiv sind.

(b) Zeigen Sie, dass das implizite Eulerverfahren kontraktiv ist.

Aufgabe 40:

Zeigen Sie, dass die

(a) Trapezregel nicht algebraisch stabil ist,

(b) implizite Mittelpunktsregel algebraisch stabil ist.

Aufgabe 41:

Für $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ und $B \in \mathbb{C}^{p,q}$ ist das Kronecker-Produkt definiert durch

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp,nq}.$$

Zeigen Sie für $A, E \in \mathbb{C}^{m,n}$, $B \in \mathbb{C}^{p,q}$, $C \in \mathbb{C}^{n,k}$ und $D \in \mathbb{C}^{q,r}$ folgende Rechenregeln für Kronecker-Produkte:

(a) $\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$

(b) $(A + E) \otimes B = A \otimes B + E \otimes B$

(c) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

(d) Für $m = n$, $p = q$ und A, B nicht singulär ist $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.
Hinweis: Verwenden Sie (c).

(e) Für $m = n$, $p = q$ sei x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und y ein Eigenvektor von B zum Eigenwert μ. Zeigen Sie, dass $x \otimes y$ ein Eigenvektor von $A \otimes B$ zum Eigenwert $\lambda\mu$ ist.

Schöne Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 7.1.2019.