

## Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 10. Übungsblatt

### Aufgabe 34:

Zeigen Sie, dass alle Nullstellen von  $\varrho(\zeta)$  eines stabilen, symmetrischen Mehrschrittverfahrens auf dem Einheitskreis liegen.

Hinweis: Ein Mehrschrittverfahren ist symmetrisch, wenn  $\alpha_j = -\alpha_{k-j}$ ,  $\beta_j = \beta_{k-j}$  für  $j = 0, \dots, k$  gilt. Zeigen Sie, dass daraus  $\varrho(\zeta) = -\zeta^k \varrho(\zeta^{-1})$  folgt.

### Aufgabe 35:

Berechnen Sie die Koeffizienten des impliziten Runge-Kutta-Verfahrens der Ordnung 4, das äquivalent zum Kollokationsverfahren mit Kollokationspunkten an den Gauß-Knoten  $c_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$  ist.

### Aufgabe 36:

Gegeben sei die explizite Mittelpunktsregel

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n.$$

- Bestimmen Sie den Stabilitätsbereich der expliziten Mittelpunktsregel.
- Liegen die Randpunkte  $\pm i$  des Stabilitätsgebiets in  $\mathcal{S}$ ?
- Untersuchen Sie die Stabilität des Verfahrens angewandt mit  $h = 1$  auf das Differentialgleichungssystem  $u' = v$ ,  $v' = -u$ .

### Aufgabe 37:

Beweisen Sie das Lemma 2 aus Abschnitt (5.12) der Vorlesung: Für die Stabilitätsfunktion gilt

$$R(z) = \frac{\det(I - z\mathcal{A} + zeb^T)}{\det(I - z\mathcal{A})}$$