MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

9.10.18

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Bringen Sie die fünf Beispiele aus der Vorlesung in die Form

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

Definieren Sie hierzu für $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ und ein jeweils geeignetes n die passende Funktion f.

Aufgabe 2:

Recherchieren Sie in einem Analysisbuch Ihrer Wahl den Satz von Picard Lindelöf. Geben Sie je ein Beispiel für eine Differentialgleichung an, die

(a) eine eindeutige Lösung für $t \in \mathbb{R}^+$,

(b) eine eindeutige Lösung nur für ein endliches Zeitintervall,

(c) mehrere Lösungen hat.

Selbstverständlich müssen Sie die von Ihnen benutzte Quelle in Form eines korrekten Literaturzitats kenntlich machen.

Aufgabe 3:

Die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion ist das klassische Beispiel für einen homogenen chemischen Oszillator. Sie dient häufig zur Veranschaulichung chaotischer Systeme. Es handelt sich um ein System mehrerer gekoppelter chemischer Reaktionen.

Informieren Sie sich über die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion und stellen Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen im Format aus Aufgabe 1 auf, das sich dabei ergibt.

Aufgabe 4:

Thomas-Fermi-Problem: (Gleichung (5.6) in DOI: `https://doi.org/10.1103/RevModPhys.63.151`). Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\phi''(x) = \frac{\phi(x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}, \quad \phi(0) = \phi_0 > 0, \quad \phi'(0) = v_0$$

(a) Transformieren sie die Gleichung auf ein System erster Ordnung durch die Einführung von $v := \phi'$.

(b) Warum ist der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar?

(c) Beweisen sie die Eindeutigkeit von Lösungen in $C^2(]0, X]) \cap C^1([0, X])$ mit Hilfe des Gronwall Lemmas (2.4). Sie brauchen folgende allgemeinere Version des Lemmas:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $u, \beta : I \to \mathbb{R}$ stetige nichtnegative Funktionen, so dass für $\alpha \geq 0$, $t_0 \in I$ und alle $t_0 \leq t \in I$

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds$$

gilt. Dann folgt

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds}$$

(d) Transformieren sie die Gleichung nichtlinear auf ein System erster Ordnung so, dass der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar ist. (Hinweis: $\psi(y) := \phi(y^2);\ w(y) = \frac{1}{y}\psi'(y)$).

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab 15.10.18.