Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra

Graphen und Eigenwerte

Achim Schädle

24. Januar 2017

Erinnerung

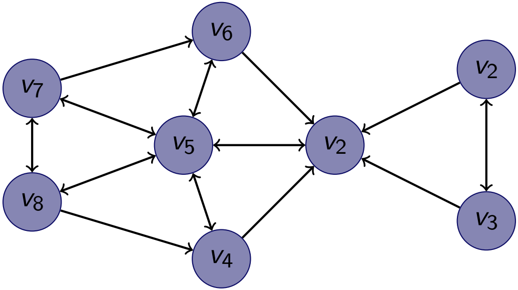
Bitte melden Sie sich rechtzeitig im Studierendenportal (`https://studierende.uni-duesseldorf.de/`) zur Klausur an.

- Die *An*meldemöglichkeit wird 6 Wochen vor dem Prüfungstermin *freigeschaltet*.
- Der *An*meldezeitraum beträgt 5 Wochen
- Die *An*meldemöglichkeit *endet* also eine Woche vor dem Prüfungstermin.
- Eine *Ab*meldung ist bis eine Woche vor dem Prüfungstermin möglich.

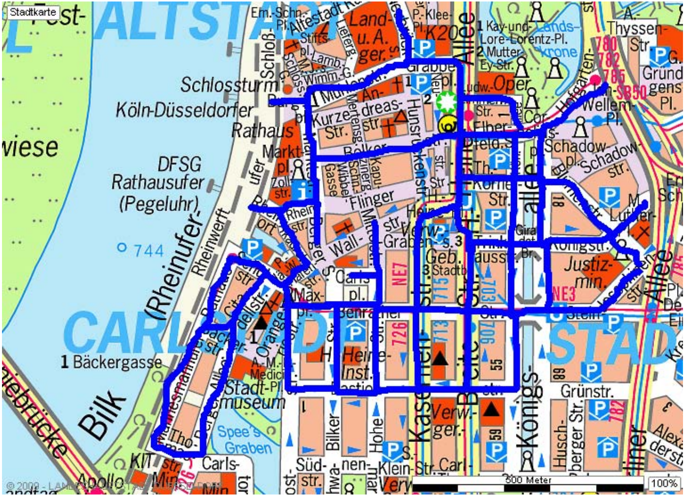
Graphen – Mathematische Definition

Ein Graph ist definiert durch $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$

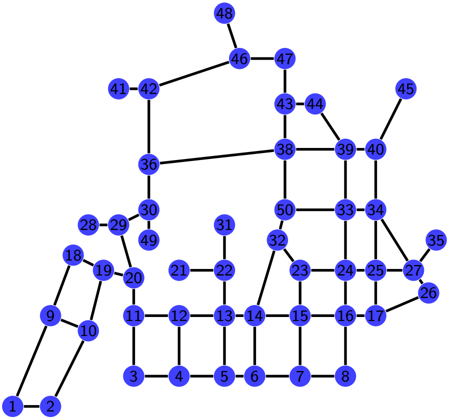
- Knoten $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - Personen, Städte, Internetseiten, ...
- Kanten $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
  - Beziehungen, Verbindungen, Links, ...



Beispiel — Straßen



Graphen



- Straßenreinigung
- Paketdienste
- ...
- Planung von Rundfahrten
- Kürzeste Wege
- Erreichbarkeit

Begriffe

Sei $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ein Graph.

- Eine Folge von Knoten $w = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{V}^k$ heißt Weg in G, falls $(v_l, v_{l+1}) \in \mathcal{E}$ für $l = 1, \ldots, k-1$ gilt.
- $v \in \mathcal{V}$ heißt erreichbar von u, $u \in \mathcal{V}$, falls es einen Weg $(v_1, \ldots, v_k)$ mit $v_1 = u$, $v_k = v$ in G gibt.
- G heißt von u aus stark zusammenhängend, $u \in \mathcal{V}$, wenn jedes $v \in \mathcal{V}$ von u aus erreichbar ist.
- G heißt stark zusammenhängend, wenn G von jedem Knoten aus stark zusammenhängend ist.

Adjazenzmatrizen

Die Adjazenzmatrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|}$ eines Graphen $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ist definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gewichtete Graphen — Motivation: Epidemiologie

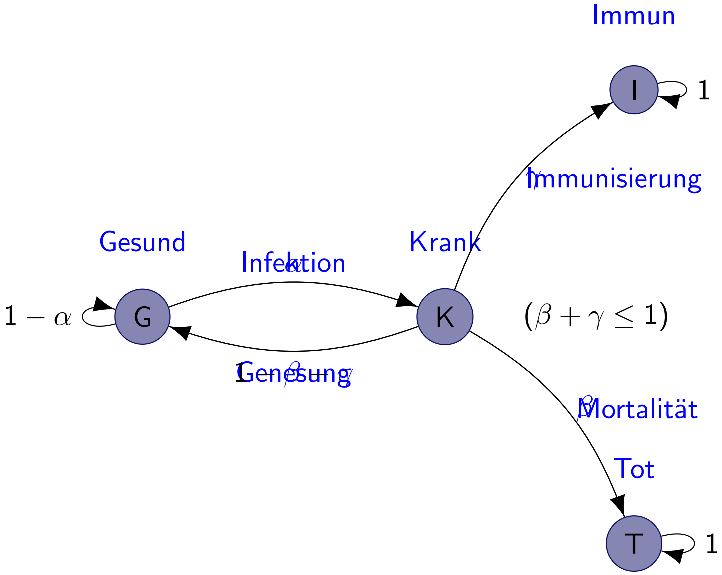
Vereinfachte Beschreibung der Auswirkung einer Krankheit auf eine Bevölkerung: Über einen gegbenen Zeitraum

- infiziert sich ein bestimmter Anteil der gesunden Bevölkerung (Infektionsrate α),
- stirbt ein bestimmter Anteil der infizierten Bevölkerung (Mortalitätsrate β) und
- der Rest wird geheilt, wobei
- ein Teil der geheilten Bevölkerung eine Immunität entwickelt (Immunisierungsrate γ).

Fragestellung

Wie entwickelt sich die Population, wenn alle diese Raten bekannt sind?

Mathematisches Modell



Mathematisches Modell

Darstellung als Kanten-gewichteter Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$

- Zustandsmenge $\mathcal{V}$
- Zustandsübergänge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
- Übergangsgewichte $\omega : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

Analog zur Adjazenzmatrix definiert man eine gewichtete Adjazenzmatrix $A_\omega \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|}$ durch

$$(A_\omega)_{v,w} = \begin{cases} \omega(v, w) & \text{falls } (v, w) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Populationsentwicklung im Modellproblem

Mit $\mathcal{V} = \{G, K, I, T\}$ erhalten wir die tranponierte Adjazenzmatrix

$$A_\omega^T = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1-\beta-\gamma & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A_ω^T nennen wir Übergangsmatrix von $\mathcal{G}$.
Die Entwicklung einer Population mit Startverteilung $x^{(0)}$ erhält man nun durch die Vorschrift

$$x^{(k+1)} = A_\omega^T \cdot x^{(k)}$$

Gilt wie in unserem Beispiel, dass $\omega(v, w) \geq 0$ und

$$\sum_{w \in \mathcal{V}} \omega(v, w) = 1 \quad \text{für alle} \quad v \in \mathcal{V},$$

so beschreibt $\mathcal{G}$ eine diskrete Markov-Kette. Diese sind die mathematische Beschreibung einfacher stochastischer Prozesse, die durch Zustände und Übergänge beschrieben werden.

Besonderes Interesse in der Untersuchung von Markov-Ketten gilt den sogenannten stationären Verteilungen, das heißt Vektoren x für die gilt

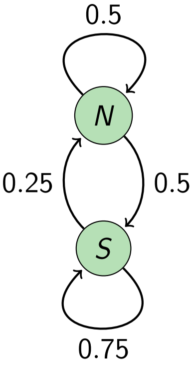
$$A_\omega^T x = x.$$

Diese sind Eigenvektoren der Adjazenzmatrix zum Eigenwert 1 und sind stabile Zustände des Systems.

Beispiel: Bevölkerungsmigration

Migrationsverhalten innerhalb eines Jahres:

- 50 % der Bevölkerung ziehen von Nord nach Süd
- 25 % der Bevölkerung ziehen von Süd nach Nord

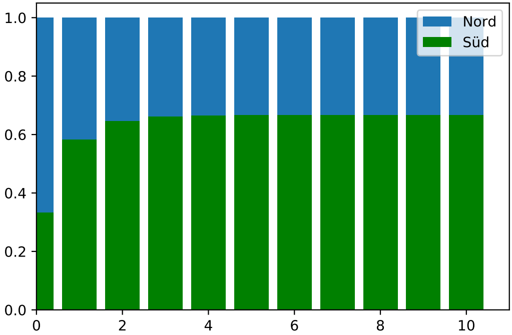


Berechnung der Entwicklung, I

Mit $\mathcal{V} = \{N, S\}$ ist die Adjazenzmatrix gegeben durch

$$A_\omega^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Bevölkerungsentwicklung



Berechnung der Entwicklung, II

Besitzt die Markov-Kette eine stationäre Verteilung unabhängig von der Startverteilung?

Betrachte die Eigenzerlegung von A_ω, es ist

$$A_\omega^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_\omega^T \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Demnach ist $(A_\omega^T)^k = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 2/3 \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow$
$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad k \rightarrow \infty$ und damit

$$x^{(\infty)} = \lim_{k\rightarrow\infty} x^{(k)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \underbrace{(x_1^{(0)} + x_2^{(0)})}_{=1}$$

unabhängig von der Anfangsverteilung $x^{(0)}$ mit $x_1^{(0)} + x_2^{(0)} = 1$.

Mathematischer Hintergrund

Satz von Perron-Frobenius

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Adjazenzmatrix eines stark zusammenhängenden Graphen mit Gewichten $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Dann ist der betragsgrößte Eigenwert λ_* von A reell, einfach und zugehörige Eigenvektoren x sind entweder positiv oder negativ.

Beobachtung:

$$\sum_{w \in \mathcal{V}} \omega(v, w) = 1 \ \forall v \in \mathcal{V} \Rightarrow \sum_j (A_\omega)_{ij} = 1 \Rightarrow \|A_\omega^T\|_1 = 1 \Rightarrow |\lambda| \|x\|_1 = \|A_\omega$$

für ein beliebiges Eigenpaar (λ, x) von A_ω^T, also ist $|\lambda| \leq 1$.

Es gilt sogar:

Ist der Graph einer endlichen diskreten Markov-Kette stark zusammenhängend, so ist der betragsgrößte Eigenwert 1 und einfach. Der zugehörige Eigenvektor x mit $\sum_i x_i = 1$ ist eindeutig und es gilt

$$A^\ell y \xrightarrow{\ell \to \infty} x \quad \text{für} \quad y_i \geq 0, \quad \sum_i y_i = 1.$$

Potenzenmethode

Satz (Potenzenmethode)

Ist A diagonalisierbar mit EW'en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, s.d. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, sind x_j normierte EV'en zu den EW'en λ_j, $j = 1, .., n$ und ist $y_0 \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor, sodass $y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ mit $\alpha_1 \neq 0$, dann gilt für

$$\tilde{y}_m = A y_{m-1},\ y_m = \tilde{y}_m / ||\tilde{y}_m||,\ m = 1, .. :$$

1. *$y_m \to x_1$ für $m \to \infty$ und*
2. *$\varrho_A(y_m) \to \lambda_1$ für $m \to \infty$.*

Definition

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $y \in \mathbb{C}^n$. Dann nennen wir

$$\varrho_A(y) = \frac{y^H A y}{y^H y}$$

den Rayleigh-Quotienten von A zum Vektor y.

Wenn $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, konvergieren die Rayleigh-Quotienten $\varrho_A(y_m)$ gegen λ_1 und $y_m / ||y_m||$ gegen einen zugehörigen normierten Eigenvektor.

Satz von Gerschgorin

Wo liegen die Eigenwerte?

Satz (Gerschgorin)

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt

$$\lambda(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j, \quad \mathcal{D}_j = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - a_{jj}| < r_j\},$$

$$r_j = \sum_{l=1,\ l\neq j}^{n} |a_{lj}|$$

$\lambda(A)$ *: Menge der Eigenwerte von* A

Die Kreise $\mathcal{D}_j$ nennen wir Gerschgorin-Kreise.