QR-Zerlegung

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad m \geq n$

Ziel: Alternative Berechnung einer QR-Zerlegung von A

$A = QR$ (wie beim modifizierten Gram-Schmidt Verfahren)

i) $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonale Abbildung

(d.h. $QQ^T = Id$

ii) $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rechte obere Dreiecksmatrix

d.h. $R = (r_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ $\quad r_{ij} = 0$ für $i > j$

$\tilde{R} = (r_{ij})_{i,j=1}^{n}$

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, n \\ \}\, m-n \end{matrix}$$ ← "unten" in R stehen lauter Nullen

Anwendungen
- Lösen von linearen Gleichungssysteme
- Lösen von Ausgleichsprobleme ⇝ nächste Woche
- Berechnung von Eigenwerten ⇝ Numerik II

1) Householder Transformationen

(1.1) Definition

Für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ heißt

$Q = I - 2vv^T$ Householdermatrix zum Vektor v

(1.2) Satz

Sei für $v \in \mathbb{R}^n$ $\underbrace{\|v\|_2}_{= \sqrt{v^T v}} = 1$ $\quad Q = I - 2vv^T$

Dann gilt:

a) Q ist symmetrisch $\quad (Q = Q^T)$

b) Q ist orthogonal $\quad (QQ^T = I)$

c) $Qv = -v$

d) $Qw = w$ für alle $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\underbrace{(w, v)}_{= w^T v} = 0$

Beweis a) $Q^T = (I - 2vv^T)^T = I^T - 2(vv^T) = I - 2vv^T = Q$

b) $Q^T Q = (I - 2vv^T)(I - 2vv^T)$

$= I - 2vv^T - 2vv^T + 4v\underbrace{v^T v}_{=1}v^T = I$

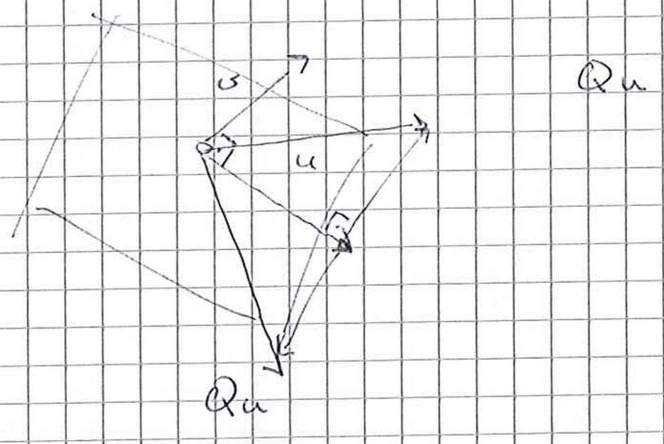
c) $Qv = (I - 2vv^T)v = v - 2v\underbrace{v^T v}_{=1} = -v$

d) $Qw = (I - 2vv^T)w = w - 2v\underbrace{v^T w}_{=0} = w$

(1.3) Geometrische Interpretation

$Q = I - 2vv^T$ beschreibt eine Spiegelung

an der Hyperebene die senkrecht auf v steht



2) Algorithmus der QR-Zerlegung

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \rightsquigarrow \quad A = QR$$

$$A = \begin{bmatrix} | & & \\ a^{(1)} & a^{(2)} \cdots & a^{(n)} \\ | & & \end{bmatrix} \qquad a^{(i)} \text{ Spaltenvektoren von } A$$

(2.1) Grundidee

① Suche $v_1 \in \mathbb{R}^m \ \|v_1\| = 1$ sodass

$$Q_1 \, a^{(1)} = (I_m - 2 v_1 v_1) \, a^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1$$

Dann ist

$$Q_1 A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline 0 & \\ | & A^{(1)} \\ 0 & \end{array}\right] \qquad \text{für} \quad A^{(1)} \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (n-1)}$$

② Suche $v_2 \in \mathbb{R}^{m-1} \ \|v_2\| = 1$ mit

$$\tilde{Q}_2 A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & * \\ \hline 0 & \\ | & A^{(2)} \\ 0 & \end{array}\right]$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \tilde{Q}_2 \end{bmatrix}$$

Dann ist

$$Q_2 Q_1 A = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & \\ \hline | & 0 & \\ & | & A^{(2)} \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

③ usw

Nach n Schritten erhalten wir

$$Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1 A = R$$

Setze $Q := Q_1^T Q_2^T \cdots Q_n^T$

$\Rightarrow \quad A = QR$ mit orthogonalem Q

(2.2) Details

Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ Wie wählt man v $\|v\| = 1$

so dass $Qa = \alpha e_1$? Was ist α

- $\|a\| \underset{\uparrow}{=} \|Qa\|_2 = \|\alpha e_1\| = |\alpha| \|e_1\| = |\alpha|$

  Q erhält die Länge

  $\Rightarrow \alpha = \pm \|a\|$ wähle $\alpha = -\text{sgn}(a_1) \|a\|_2$

- $u := a - \alpha e_1 \qquad v = \dfrac{u}{\|u\|_2}$

  Dann ist $\|v\|_2 = 1$

  Wegen $\|u\|_2^2 = \langle a - \alpha e_1, a - \alpha e_1 \rangle =$

$$\underbrace{\langle a, a\rangle}_{= \alpha^2} - 2\alpha \underbrace{\langle a, e_1\rangle}_{a_1} + \alpha^2 \underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{1}$$

$$= 2\alpha(\alpha - a_1)$$

und $\langle u, a\rangle = \langle a, a\rangle - \alpha \langle e_1, a\rangle = \alpha(\alpha - a_1)$

ist $Qa = (I - 2vv^T)a = \left(I - 2\dfrac{uu^T}{\|u\|_2^2}\right) a$

$$= a - \frac{2\langle u, a\rangle}{\|u\|_2^2} u = a - 2\frac{\alpha(\alpha - a_1)}{2\alpha(\alpha - a_1)} u$$

$$= a - u = \alpha e_1$$