MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

13.12.2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

| 36 | 37 | 38 | 39 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

GRUPPE: ____________________

# Numerik II – 9. Übungsblatt

## Aufgabe 36:

Zeigen Sie, dass für normale Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $z \notin \sigma(A)$ gilt

$$\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))} = ||(zI - A)^{-1}||_2.$$

Hierbei ist für $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ die Distanz $\operatorname{dist}(z, \Omega) := \inf_{x\in\Omega}\{|x - z|\}$.

## Aufgabe 37:

(a) Zeichnen Sie die Gershgorinkreise folgender Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & i \\ -0.5 & (-2+2i) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ i & 0 & -1 & (1+i) \end{pmatrix}.$$

(b) Beweisen Sie folgende Variante des Satzes von Gershgorin:
Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Eigenwert $\lambda$ gibt es einen (Spalten-)Index $j$ so, dass

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|.$$

(c) Verkleinern Sie nun mit Hilfe von Aufgabenteil (b), soweit möglich, die in Aufgabenteil (a) markierten Bereiche für die Eigenwerte von $A$.

## Aufgabe 38:

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Wertebereichs $\mathcal{F}(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

(a) $\mathcal{F}(A + \alpha I) = \mathcal{F}(A) + \alpha$ und $\mathcal{F}(\alpha A) = \alpha\mathcal{F}(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Für den Hermiteschen Anteil $H = \frac{1}{2}(A + A^H)$ von $A$ gilt $\mathcal{F}(H) = \operatorname{Re}\mathcal{F}(A)$, wobei $\operatorname{Re}\mathcal{F}(A)$ die Projektion von $\mathcal{F}(A)$ auf die reelle Achse bezeichnet.

(c) $\mathcal{F}(A+B) \subset \mathcal{F}(A)+\mathcal{F}(B)$ für alle $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Geben Sie ein Beispiel, für das eine echte Inklusion vorliegt.

b.w.

**Aufgabe 39:** (QR Algorithmus ohne Shifts)

Implementieren Sie den QR Algorithmus ohne Shifts aus der Vorlesung. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `HH = qralg(H,tol)`, die den ungeshifteten QR Algorithmus auf eine obere Hessenbergmatrix $H \in \mathbb{C}^{m \times m}$ anwendet. Brechen Sie ab, wenn der betragsmäßig größte Eintrag der unteren Nebendiagonalen kleiner als `tol` ist.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `ew=findeeigenwerte(A,tol)`, die zunächst die obere Hessenbergform einer Matrix `A` berechnet und dann `qralg` verwendet um alle Eigenwerte von `A` zu berechnen. Speichern Sie die berechneten Eigenwerte in einem geeigneten Vektor `ew`.

(c) Modifizieren Sie `qralg` derart, dass Sie neben `HH` einen Vektor zurückliefern, der die Werte von $|H_{n,n-1}|$ in jeder Iteration enthält. Plotten Sie dann die aneinandergereihte Konvergenzgeschichte aller Eigenwerte in einem logarithmischen Plot gegen die Anzahl an QR-Zerlegungen.

(d) Testen Sie Ihre Implementation mit Matrizen mit reellen Eigenwerten und der Hilbertmatrix (`hilbert` in Python bzw. `hilb` in Matlab).

(e) Erstellen Sie einen $n \times n$ Jordanblock $J$ (obere Dreicksmatrix). Stören Sie diesen mit einem $\epsilon$ an der Stelle $j_{n,1}$. Plotten Sie die Eigenwerte der (gestörten) Matrizen für verschiedene $\epsilon \geq 0$ in jeweils verschiedenen Farben in das gleiche Fenster. Was fällt Ihnen auf?

**Hinweis:** Die Pythonfunktionen `hessenberg` und `qr` aus dem Modul `scipy.linalg` bzw. die Matlabfunktionen `hess` und `qr` dürfen Sie verwenden.

**Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 20.12.2017 zu Beginn der Vorlesung.**
**Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Mittwoch, 20.12.2017, 16:00 Uhr an** ***marina.fischer@uni-duesseldorf.de.***