Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

06.12.2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

32	33	34	35	Σ

Name: ______________

Mat-Nr.: ______________

Gruppe: ______________

Numerik II – 8. Übungsblatt

Aufgabe 32:

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sofern nicht anders angegeben. Zeigen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel für die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und λ ist ein Eigenwert von A, dann ist $-\lambda$ ein Eigenwert von A.

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und λ ist ein Eigenwert von A, dann ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

(c) Wenn λ ein Eigenwert von A ist und A nichtsingulär, dann ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

(d) Wenn $\sigma(A) = \{0\}$, dann ist $A = 0$.

(e) Aus $AA^H = A^H A$ folgt $A = A^H$.

(f) Ist A hermitesch, d.h. $A = A^H$, dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 33:

(a) Beweisen Sie Lemma 1.4:
Sind zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ähnlich, so haben sie dasselbe charakteristische Polynom und dieselben Eigenwerte.

(b) Sei nun $M = LR$ ein (nichtsingulärer) Vorkonditionierer für die nichtsinguläre Matrix A, wobei L und R nicht notwendigerweise untere bzw. obere Dreiecksmatrizen sind. Zeigen Sie, dass die Matrizen $M^{-1}A$, AM^{-1} und $L^{-1}AR^{-1}$ dieselben Eigenwerte besitzen.

Aufgabe 34:

Beweisen Sie Lemma 1.6:
Gibt es zu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ein $X \in \mathbb{C}^{n \times k}$ mit $1 \leq \operatorname{rang}(X) = k \leq n$ und ein $B \in \mathbb{C}^{k \times k}$ so, dass $AX = XB$, dann gilt $\mathcal{R}(AX) \subseteq \mathcal{R}(X)$ und $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$.

Aufgabe 35:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und e_1, e_2, e_3 bezeichnen die üblichen Einheitsvektoren. Welche der folgenden Unterräume sind rechts A-invariant, welche nicht? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.

(a) $\mathcal{R}(e_1)$,

(b) $\mathcal{R}(e_2)$,

(c) $\mathcal{R}(e_3)$,

(d) $\mathcal{R}([e_1, e_2])$,

(e) $\mathcal{R}([e_2, e_3])$,

(f) $\mathcal{R}([e_1, e_2, e_3])$.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 13.12.2017 zu Beginn der Vorlesung.