Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

22.11.2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

24	25	26	27	Σ

Name: ____________

Mat-nr.: ____________

Gruppe: ____________

Numerik II – 6. Übungsblatt

Aufgabe 24:

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Leiten Sie das CGNE-Verfahren (Conjugate Gradient for Normal Equations) zur Approximation von x her, indem Sie $x = A^T u$ substituieren und auf das resultierende Gleichungssystem für u das CG-Verfahren anwenden. Elimimieren Sie im CGNE-Verfahren die Variable u, sodass Sie eine Näherungsfolge $(x_k)_k$ erhalten.

Aufgabe 25:

Angenommen, das Arnoldi-Verfahren bricht in Schritt m ab, d.h. $h_{m+1,m} = 0$. Zeigen Sie, dass dann

(a) $\mathcal{K}_m(A, b)$ ein A-invarianter Unterraum ist.

(b) $\mathcal{K}_m(A, b) = \mathcal{K}_{m+1}(A, b) = \mathcal{K}_{m+2}(A, b) = \dots$, also $\dim \mathcal{K}_N(A, b) = m$ gilt.

Aufgabe 26:

Verifizieren Sie die Formeln für die Givens-Rotationsmatrizen. Zeigen Sie für gegebenes δ, $\gamma \in \mathbb{C}$:

$$\begin{bmatrix} c_m & s_m \\ -\overline{s}_m & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(\delta)\sqrt{|\delta|^2 + |\gamma|^2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

mit

$$c_m = \frac{|\delta|}{\sqrt{|\delta|^2 + |\gamma|^2}}, \qquad s_m = \operatorname{sgn}(\delta)\frac{\overline{\gamma}}{\sqrt{|\delta|^2 + |\gamma|^2}} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{sgn}(\delta) = \begin{cases} \frac{\delta}{|\delta|}, & \text{falls } \delta \neq 0 \\ 1, & \text{falls } \delta = 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 27:

Beim QMR-Verfahren kann man die Residuennorm $\|r_m\|$ nicht so einfach aus bekannten Größen ablesen wie bei den anderen Verfahren. Man kann jedoch die Matrix-Vektormultiplikation zur Berechnung von $r_m = b - Ax_m$ einsparen, wenn man die folgende Update-Formel für die Residuenvektoren verwendet:

$$r_m = |s_m|^2 r_{m-1} + \rho_m c_m v_{m+1}.$$

Beweisen Sie diese Rekursion in folgenden Schritten:

(a) Zeigen Sie, dass $r_m = \rho_m z_m$, $z_m = V_{m+1} Q_m e_{m+1}$.

Hinweis: Verwenden Sie $x_m = V_m y_m$ mit $y_m = R_m^{-1} q_m$ und $r_m = V_{m+1}(\beta e_1 - \widetilde{T}_m y_m)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und der speziellen Form von Q_m als Produkt von m Givens-Rotationen

$$Q_m e_{m+1} = -s_m \begin{bmatrix} Q_{m-1} e_m \\ 0 \end{bmatrix} + c_m e_{m+1}.$$

(c) Schließen Sie aus (b) die Rekursion

$$z_m = -s_m z_{m-1} + c_m v_{m+1}$$

und daraus mit Hilfe von $\rho_m = -\overline{s}_m \rho_{m-1}$ die Behauptung.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 29.11.2017 zu Beginn der Vorlesung.