MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

15.11.2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

20	21	22	23	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

GRUPPE: ____________________

Numerik II – 5. Übungsblatt

Aufgabe 20: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_F^2 := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

eine Matrixnorm ist. Diese wird als die *Frobenius-Norm* bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm nicht als eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm aufgefaßt werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass die Frobeniusnorm submultiplikativ ist, also dass für $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ gilt

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F\ .$$

(c) Ist $\{v^1, ..., v^n\}$ eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathbb{R}^n$, so gilt $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|Av^i\|_2^2$.

(d) Mit $\text{Spur}(M) := \sum\limits_{i=1}^{n} m_{ii}$ wird die *Spur* der Matrix $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\|A\|_F^2 = \text{Spur}(A^T A).$$

Aufgabe 21:

Beweisen Sie Satz 1.8:
Ist $AV_m = V_m H_m$ und ist $W_m^H V_m$ invertierbar, so ist $x_m = V_m y_m$, wobei y_m durch (G) oder (M) charakterisiert ist, die exakte Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 22:

Beweisen Sie Lemma 2.3:
Sind $V_k = [v_1, \ldots, v_k]$, $\tilde{H}_k = (h_{ij})$ mit v_j und h_{ij} aus (2.1) und b_k k-ter Einheitsvektor, dann gilt

(a) $V_k^H V_k = I_k$

(b) $AV_k = V_{k+1}\tilde{H}_k = V_k H_k + h_{k+1,k} v_{k+1} b_k^T$

(c) $V_k^H A V_k = H_k$

(d) Falls $A = A^H$, so ist $H_k = H_k^H$ tridiagonal

Aufgabe 23:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ mit vollem Rang und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Lösung des linearen Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 = \min!$$

durch $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ gegeben ist.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 22.11.2017 zu Beginn der Vorlesung.