Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

25.10.2017

| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Name: ____________________

Mat-Nr.: ____________________

Gruppe: ____________________

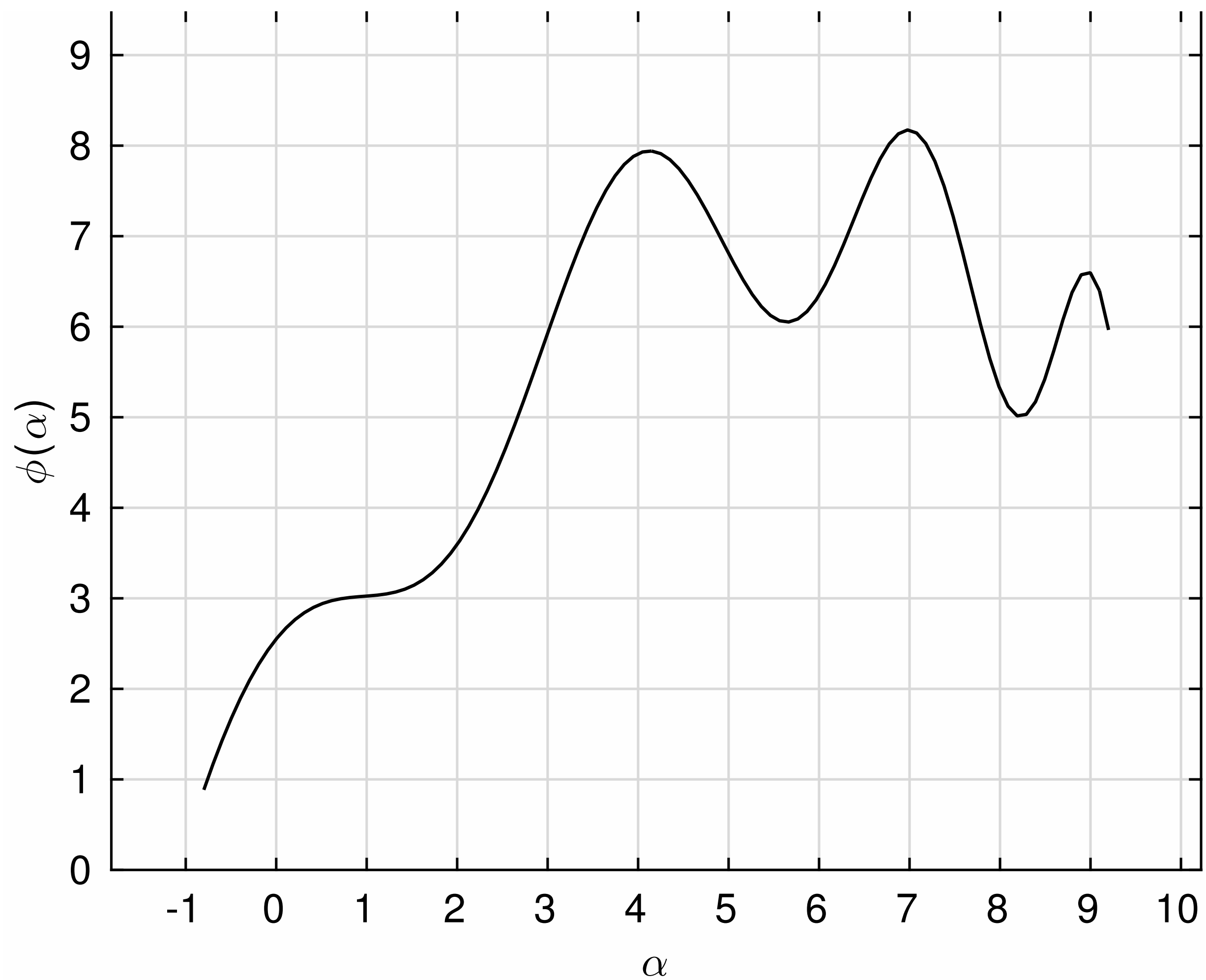
# Numerik II – 3. Übungsblatt

## Aufgabe 11:

Zur Bestimmung eines lokalen **Maximums** einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann man das Verfahren des steilsten **Anstiegs** verwenden.

(a) Formulieren Sie hierfür ausgehend von der Iterierten $x_k$ die Verfahrensvorschrift zur Berechnung von $x_{k+1}$. Zur Wahl der Schrittweite können Sie die optimale Schrittweite verwenden.

(b) Wie sollten bei einem Anstiegsverfahren die beiden Wolfebedingungen aussehen, die die zulässigen Schrittweiten bestimmen?
Skizzieren Sie für die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \phi(\alpha) := f(x_k + \alpha s_k)$ diese beiden Wolfebedingungen für $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{2}{3}$ in die Grafik.




b.w.

**Aufgabe 12:**

Implementieren Sie das CG-Verfahren zur Minimierung nichtquadratischer Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Algorithmus 2.11 mit Fletcher-Reeves aus der Vorlesung) mit einer Armijo-Liniensuche. Verwenden Sie

```
[x,xall] = con_grad(f, g, x0, tol)
```

als Signatur. Dabei bezeichnet `f` den Handle auf die Funktion, `g` den Handle auf deren Gradienten, `x0` den Startpunkt und `tol` den Parameter für das Abbruchkriterium. Zurückgegeben werden sollen die Approximation `x` der Minimalstelle und alle Zwischenschritte in einer Matrix `xall` (also `xall=[x0,x1,x2,...,xm]`). Lösen Sie hiermit die folgenden Aufgaben:

(a) Minimiere die Funktion $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ (Himmelblau-Funktion) mit `tol`$=10^{-1}$ und `x0` $= (-0.27, -0.91)^T$, `x0` $= (-0.271, -0.91)^T$, `x0` $= (-0.25, -1.1)^T$ und `x0` $= (-0.25, -1)^T$.

(b) Minimiere die Funktion $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 105(x_2 - x_1^2)^2$ (Rosenbrock-Funktion) mit `x0`$=(0.5, -1)^T$ und `tol`$=10^{-2}$.

Plotten Sie in beiden Fällen die Funktion und jeweils die Pfade der ersten 40 Zwischenschritte zu den verschiedenen Startwerten.

**Aufgabe 13:**

Zeigen Sie die folgenden Invarianzeigenschaften von Krylov-Räumen:

(a) Skalierung: $\mathcal{K}_m(\alpha A, \beta b) = \mathcal{K}_m(A, b)$ für alle $\alpha, \beta \neq 0$.

(b) Translation: $\mathcal{K}_m(A - \alpha I, b) = \mathcal{K}_m(A, b)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(c) Basiswechsel: $\mathcal{K}_m(TAT^{-1}, Tb) = T\mathcal{K}_m(A, b)$ für alle nicht singulären Matrizen $T$.

**Aufgabe 14:**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$. $x_m$ sei eine Folge von approximativen Lösungen von $Ax = b$. Zeigen Sie, dass für $\hat{x} := A^{-1}b$, $e_m := \hat{x} - x_m$ und $r_m := A(\hat{x} - x_m) = Ae_m$ gilt:

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|r_m\|}{\|r_0\|} \leq \frac{\|e_m\|}{\|e_0\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r_m\|}{\|r_0\|},$$

wobei $\kappa(A)$ die Konditionszahl von $A$ bezeichnet.

**Aufgabe 15:** Zur Bestimmung des Minimums der quadratischen Funktion

$$f(x) = x^T Ax + b^T x + c$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, kann man das Newtonverfahren verwenden, wobei die Schrittweite optimal gewählt wird.

(a) Geben Sie hierfür die Iterationsvorschrift an.

(b) Geben Sie den Gradienten und die Hessematrix von $f(x)$ an.

(c) Bestimmen Sie, sofern der Newtonschritt existiert, die optimale Schrittweite.

(d) Diskutieren Sie das Konvergenzverhalten.

**Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 08.11.2017 zu Beginn der Vorlesung.**
**Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Mittwoch, 08.11.2017, 16:00 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.**