MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

18.10.2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

6	7	8	9	10	Σ

NAME: ______________

MAT-NR.: ______________

GRUPPE: ______________

Numerik II – 2. Übungsblatt

Aufgabe 6:

Zeigen Sie: Falls $0 < c_2 < c_1 < 1$ gilt, kann es sein, dass es für eine Abstiegsrichtung $s \in \mathbb{R}^n$ (mit $\|s\|_2 = 1$) von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (nach unten beschränkt) keine Schrittlänge $\alpha > 0$ gibt, die die Wolfebedingung

$$\begin{aligned} f(x+\alpha s) &\leq f(x) + c_1 \alpha \nabla f(x)^T s \\ \nabla f(x+\alpha s)^T s &\geq c_2 \nabla f(x)^T s \end{aligned}$$

erfüllt.

Aufgabe 7:

Betrachten Sie eine symmetrische und positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ und das quadratische Funktional $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$. Des Weiteren seien $x, s \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\nabla f(x)^T s < 0$. Zeigen Sie, dass die Minimalstelle α^* von $\varphi(\alpha) = f(x + \alpha s)$ eine Wolfe-Schrittweite ist, wenn $0 \leq c_1 \leq \frac{1}{2} \leq c_2 \leq 1$.

Aufgabe 8:

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A werde iterativ mit der Methode des steilsten Abstiegs gelöst.

(a) Zeigen Sie, dass mit den optimalen Schrittweiten α_k aus der Vorlesung zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen zueinander orthogonal sind.

(b) Zeigen Sie weiterhin, dass dann in der Norm $\|v\|_A = \sqrt{v^T Av}$ für den Fehler der Iterierten gilt

$$\|x_{k+1} - \widehat{x}\|_A \leq \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa_2(A)}}\, \|x_k - \widehat{x}\|_A,$$

wobei $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.
Das Verfahren konvergiert also (aber sehr langsam, falls A schlecht konditioniert ist).
Hinweis: Es ist $(\widehat{x} - x_k)^T A(\widehat{x} - x_k) = r_k^T A^{-1} r_k$. Rechnen Sie nach, dass

$$r_{k+1}^T A^{-1} r_{k+1} = r_{k+1}^T A^{-1} r_k = r_k^T A^{-1} r_k \left(1 - \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k} \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A^{-1} r_k}\right)$$

und schließen Sie daraus die Behauptung.

b.w.

Aufgabe 9:

Implementieren Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$ durch die Minimierung des quadratischen Funktionals $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$. Verwenden Sie dazu die exakten Schrittweiten α_k aus der Vorlesung und testen Sie Ihr Verfahren anhand geeigneter Beispiele.

Aufgabe 10:

Beweisen Sie den folgenden Satz: Seien $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$. Sei $x \in V$, dann gilt

$$f(x) = \min_{y \in V} f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y^T Ax = y^T b \quad \forall y \in V.$$

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 25.10.2017 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Mittwoch, 25.10.2017, 16:00 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.