

Numerik II – 10. Übungsblatt

Aufgabe 40:

- (a) Zeigen Sie, dass eine reelle Matrix, deren Gershgorin-Kreise alle disjunkt sind, nur reelle Eigenwerte hat.
- (b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$|z - a_{ii}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n d_j |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

liegen, wobei $d_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ beliebige positive Skalierungsfaktoren sind.

Hinweis: Verwenden Sie eine Ähnlichkeitstransformation.

Aufgabe 41:

Gegeben sei eine beliebige 3×3 -Matrix, in der wir Nullelemente durch Multiplikation mit unitären Matrizen U_j (etwa Householder-Matrizen) von links oder rechts erzeugen möchten. Betrachten Sie die folgenden Matrixstrukturen:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}.$$

Entscheiden Sie für jede der drei Matrixstrukturen, welche der folgenden Situationen gilt und rechtfertigen Sie Ihre Aussage:

- (a) Kann durch eine Folge von Multiplikationen von links mit Matrizen U_j erzeugt werden.
- (b) Nicht (a), kann durch eine Folge von Multiplikationen von links und rechts mit Matrizen U_j erzeugt werden. Dabei müssen die Transformationen von links und rechts *nicht* dieselben sein.
- (c) Kann nicht durch eine Folge von Multiplikationen von links und rechts mit Matrizen U_j erzeugt werden.

Aufgabe 42: (Bauer-Fike)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar, $X^{-1}AX = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und sei μ ein näherungsweise Eigenwert mit näherungsweise Eigenvektor $y \in \mathbb{C}^n$ mit $\|y\|_p = 1$. Zeigen Sie, dass in jeder p -Norm

$$\min_{1 \leq j \leq n} |\mu - \lambda_j| \leq \kappa_p(X) \|r\|_p$$

gilt, wobei $r = Ay - \mu y$ der Residuenvektor ist.

b.w.

Aufgabe 43: (QR Algorithmus mit Shifts)

Ergänzen Sie die Implementierung des QR Algorithmus ohne Shifts aus Aufgabe 39 um die Möglichkeit Shifts zu verwenden. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor.

- (a) Modifizieren Sie die Funktion `qralg` derart, dass Sie einen *einfachen* Rayleigh-Shift in jeder Iteration verwenden.
- (b) Modifizieren Sie die Funktion `qralg` derart, dass Sie den Wilkinson-Shift in jeder Iteration verwenden.
- (c) Testen Sie alle drei Varianten Ihres Programmes (kein Shift, Rayleigh- oder Wilkinson-Shift) mit der Matrix

`A = np.diag(np.arange(15,0,-1)) + np.ones(15)` (Python) bzw.
`A = diag(15:-1:1) + ones(15,15)` (Matlab).

Vergleichen Sie die Konvergenzverläufe. Ist die Konvergenz linear, superlinear, quadratisch, kubisch,... ? Kann man sinnvollerweise von der "Anzahl Iterationen des QR-Algorithmus pro Eigenwert" sprechen?

Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 10.01.2018 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Mittwoch, 10.01.2018, 16:00 Uhr an
marina.fischer@uni-duesseldorf.de.