MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

11.10.2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

1	2	3	4	5	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

GRUPPE: ____________

Numerik II – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Berechnen Sie für $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ zu folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung.

(a) $x \mapsto \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + b^{\mathrm{T}}x$, für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$;

(b) $x \mapsto \sum_{i=1}^m \log(\gamma_i - b_i^{\mathrm{T}}x - \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_{(i)}x)$, für $A_{(i)} = A_{(i)}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$;

(c) $x \mapsto e^{x^{\mathrm{T}}Ax}$, für $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 2:

Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit

$$\sin[x] = (\sin(x_1), \sin(x_2), \ldots, \sin(x_n))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$$

die komponentenweise Auswertung der Sinusfunktion. Leiten Sie nun die folgenden Funktionen jeweils einmal ab.

(a) $x \mapsto a^{\mathrm{T}}\sin[x]$, für $a \in \mathbb{R}^n$;

(b) $x \mapsto \sin[x]^{\mathrm{T}}A\sin[x]$, für $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

(c) $x \mapsto a^{\mathrm{T}}\sin[Ax + b]$, für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$;

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das Problem $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ für das Polynom

$$f(x) = (x_1^2 - x_2)(x_1^2 - 2x_2).$$

(a) Zeigen Sie: Für jede Richtung $d \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ hat die Funktion $\lambda \mapsto f(\lambda d)$ in $\lambda^* = 0$ eine strikte lokale Minimalstelle und es gilt $\lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda d) = \infty$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Punkt $x^* = 0$ ist eine Minimalstelle von f.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: $\lim_{\|x\|_2\to\infty} f(x) = \infty$.

Aufgabe 4:

Es seien $x = 0$ und $d = 1$ gegeben. Zeigen Sie: Es gibt differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass d eine Abstiegsrichtung von f in x ist, aber f für alle $\epsilon > 0$ auf dem Intervall $(0, \epsilon]$ nicht monton ist.

Hinweis: Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt $d \in \mathbb{R}^n$ Abstiegsrichtung von f in x, falls ein $\bar{\epsilon} > 0$ existiert, so dass

$$f(x + td) < f(x)$$

für alle $t \in (0, \bar{\epsilon}]$ gilt.

b.w.

Aufgabe 5:

Sei $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist durch

$$\langle x, y \rangle_H := x^T H y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert, welches die Norm

$$\|x\|_H = \sqrt{x^T H x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

induziert.

Sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) \neq 0$ gegeben. Bestimmen Sie eine Lösung des Problems

$$\min_{d : \|d\|_H = 1} \nabla f(x)^T d.$$

Warum ist damit Satz (2.1) der Vorlesung bewiesen?

Bemerkungen:

Pro Aufgabe gibt es sechs Punkte.

Bitte schreiben Sie auf jeden abgegebenen Übungszettel *lesbar* Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer. Die Abgabe der Zettel ist immer Mittwochs zu Beginn der Vorlesung. Sie werden korrigiert in der jeweiligen Übungsgruppe zurückgegeben.

Zulassungsvoraussetzung für die Prüfung:

- Sie müssen mindestens 40% der Übungspunkte erreichen.
- Weiterhin müssen Sie mindestens drei (Teil-)Aufgaben in der Übungsgruppe vorrechnen.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 18.10.2017 zu Beginn der Vorlesung.