Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Max Schneiders

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

07.12.2017

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 9. Übungsblatt

Aufgabe 35:

Erzeugen Sie die folgenden Matrizen mit Hilfe von `sympy`, **ohne** jeden Eintrag einzeln einzugeben. Verwenden Sie geeignete Bildungsvorschriften!

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \\ 16 & 25 & 36 & 49 & 64 \\ 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 24 & 19 & 14 & 9 & 4 \\ 23 & 18 & 13 & 8 & 3 \\ 22 & 17 & 12 & 7 & 2 \\ 21 & 16 & 11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 36:

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Rang von $[A \mid b]$ und machen Sie eine Aussage über die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ und geben Sie die Lösung als Vektor an. Überprüfen Sie, ob dieser Vektor das System tatsächlich löst.

(c) Geben Sie zwei konkrete Lösungen des Systems an

Aufgabe 37:

Betrachten Sie die Matrix aus Aufgabe 35 Teil c).

(a) Berechnen Sie „von Hand“ die Eigenwerte dieser Matrix. Das heißt berechnen Sie mit Hilfe der Determinante das charakteristische Polynom und ermitteln Sie daraus die Eigenwerte.

(b) Berechnen Sie außerdem die zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Bestimmen Sie die euklidische Norm $\|v\|_2 = \sqrt{v^T v}$ der Eigenvektoren.

Aufgabe 38:

(a) Schreiben Sie eine Python-Funktion `mygradient(f,var)`, die den Gradienten einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ berechnet, wobei `var` ein Tupel ist, das die Variablen enthält, nach denen abgeleitet wird. Das Resultat soll als Vektor zurückgegeben werden.

(b) Schreiben Sie eine Python-Funktion `myhesse(f,var)`, die die Hessematrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ berechnet, wobei `var` ein Tupel ist, das die Variablen enthält, nach denen abgeleitet wird. Das Resultat soll als Matrix zurückgegeben werden.

(c) Testen Sie Ihre Funktionen für $f(x, y, z) = x^2 + \sin(y) + \mathrm{e}^{-z}$.

Besprechung in den Übungen vom 11.-15. Dezember 2017.