MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MAX SCHNEIDERS

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

23.11.2017

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 7. Übungsblatt

Aufgabe 27:

Es sei

$$b_k = (-1)^k k^2 - (-1)^k \left(k - \frac{1}{k^3}\right)^2.$$

Bestimmen Sie $S := \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Wenn Sie das ohne Umwege vornehmen, erhalten Sie einen Ausdruck, der zwei Polylogarithmen Li_2 und Li_6 enthält. Es gibt aber einen elementaren Ausdruck für die Summe.

Überlisten Sie `sympy` auf die folgende Weise: Fassen Sie jeweils ein gerades und ungerades Folgenglied zusammen und bestimmen Sie S auf diese Weise. Die neue Formel enthält ebenfalls die Polylogarithmen, aber mit anderen Koeffizienten. Da die beiden Werte für S übereinstimmen müssen, kann man die Gleichheit benutzen, um Li_2 durch Li_6 auszudrücken. Damit kann man schließlich die Polylogarithmen komplett aus den Formeln eliminieren. Überprüfen Sie anschließend die Ergebnisse numerisch.

Hinweis: Mit `solve` kann man auch nach Ausdrücken auflösen. Beispielsweise führt `solve(2*sin(x)-1, sin(x))` zu $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 28:

Für $\varepsilon > 0$ ist die Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x = \varepsilon$ gegeben. Lösen Sie diese Gleichung symbolisch. Sie erhalten drei verschiedene, von ε abhängige Lösungen. Bestimmen Sie bei allen Lösungen den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$.

Der Satz von Rouché, der allerdings erst in der Funktionentheorie gezeigt werden wird, besagt, dass diese Grenzwerte die Lösungen der Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x = 0$ sind. Bestätigen Sie das, indem Sie die drei Grenzwerte einerseits numerisch auswerten und andererseits jeweils den Real- und Imaginärteil bestimmen.

Aufgabe 29:

Zeichnen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Lösungsmenge von

$$\left|\frac{R(z)}{e^z}\right| = 1,$$

mit der rationalen Funktion

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z}{1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}$$

im Bereich $[-4, 4] \times i[-5, 5]$.

Hinweis: Bei dieser Lösungsmenge handelt es sich um einen so genannten Ordnungsstern.

(b.w.)

Aufgabe 30:

(a) Lösen Sie die Gleichung $2^x - 2\sqrt{x} = 0$. Überprüfen Sie an einem Plot, ob alle Lösungen gefunden wurden. Berechnen Sie ggf. weitere Lösungen numerisch.

(b) Lösen Sie die Gleichung $3^x - 3x^{2/3} = 0$. Dieses Mal kommen zwei Lösungen heraus. Bestimmen Sie deren numerischen Werte. Es handelt sich um zwei rationale Zahlen. Setzen Sie diese in die Gleichung ein, um zu überprüfen, dass die Gleichung tatsächlich gelöst wird.

Sie erhalten so eine komplizierte Darstellung der Zahl 1.

(c) Raten Sie die Lösungen der Gleichung $a^x - ax^{(a-1)/a} = 0$ für $a \geq 1$. Überprüfen Sie ihre Vermutung für $a \in \{1, \ldots, 10\}$, indem Sie die Lösung zunächst als Fließkommazahl berechnen und anschließend als exakte rationale Zahl wieder in die Gleichung einsetzen. Verwenden Sie eine `for`-Schleife und für die Ausgabe die Funktion `display` (denken Sie an den entsprechenden Import).

Besprechung in den Übungen vom 27. November-1. Dezember 2017.