MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MAX SCHNEIDERS

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

09.11.2017

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 5. Übungsblatt

Aufgabe 18:

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5 - 5\,x^4 - 10\,x^3 + 50\,x^2 + 9\,x - 45$.

(a) Erstellen Sie zwei Listen: `Liste1` mit den Werten $f(k)$ für $k = -5, \dots, 2$ und `Liste2` mit den Werten $f(k)$ für $k = -1, \dots, 7$.

(b) Wandeln Sie die Listen in zwei Mengen A und B um und bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $A \cup B$. Verwenden Sie die Methode `.union` für Mengen.

Aufgabe 19:

Die Legendre-Polynome L_n, $n \in \mathbb{N}_0$, auf dem Intervall $[-1, 1]$ werden rekursiv definiert als

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = x,$$
$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad \text{für } n \geq 1.$$

(a) Berechnen Sie L_n für $0 \leq n \leq 10$ und überprüfen Sie ihre Ergebnisse mit der `sympy`-Funktion `legendre(n,x)`.

(b) Zeigen Sie, dass für n, $m \in \{0, 1, \dots, 10\}$ jeweils gilt, dass

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) \cdot L_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & \text{falls } n = m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Zeichnen Sie die Legendre-Polynome für die ungeraden n in ein einziges Bild und fügen Sie eine aussagekräftige Legende außerhalb des Plots hinzu.

Hinweis: Verwenden Sie in allen Teilaufgaben for-Schleifen und zum Plotten die Bibliothek `matplotlib`. Benutzen Sie außerdem für die symbolische Ausgabe die Funktion `display`.

Aufgabe 20:

Die Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$f_0 := f_1 := 1,$$
$$f_{j+1} := f_j + f_{j-1} \quad \text{für } j \geq 1.$$

(a) Berechnen Sie mittels einer Schleife die Fibonacci-Zahlen f_j für $1 \leq j \leq 100$, ohne dass diese ausgegeben werden. Verwenden Sie nun einen einzigen Befehl, um jede vierte Fibonacci-Zahl auszugeben.

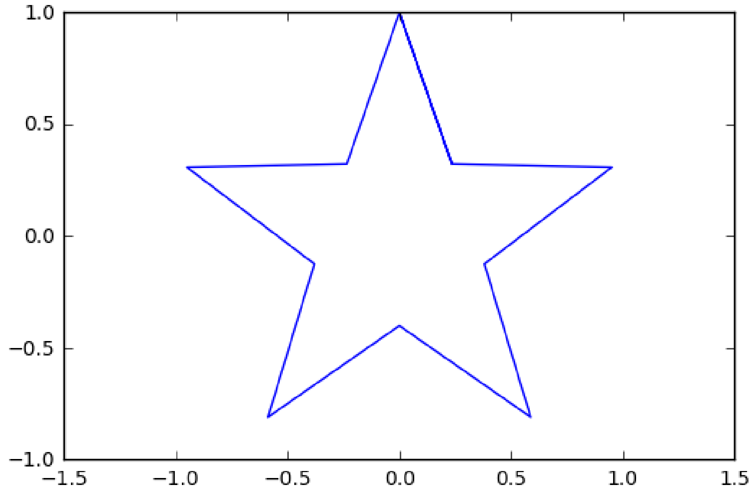
(b) Erzeugen Sie eine Liste mit den Primzahlen $p_1, \dots, p_{25}$ und lassen Sie die Fibonacci-Zahlen $f_{p_1}, \dots, f_{p_{25}}$ untereinander ausgeben.

Hinweis: Hier kann `primerange` hilfreich sein.

(b.w.)

Aufgabe 21:

Zeichnen Sie den folgenden regelmäßigen fünfstrahligen Stern:



Aufgabe 22:

(a) Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `myprimes(n)`, die eine Liste mit allen Primzahlen bis einschließlich n erzeugt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Speichern Sie zunächst alle Zahlen von 2 bis n in einer Liste.
- Wählen Sie das erste Element dieser Liste aus und entfernen Sie alle Vielfache dieser Zahl aus der Liste.
- Wiederholen Sie den letzten Schritt für alle übrigen Zahlen in der Liste.

Hinweis: Diesen Algorithmus nennt man auch *Sieb des Eratosthenes*.

(b) Überprüfen Sie mit Hilfe des `in`-Operators, ob die Zahlen $263, 571, 4517$ und 9799 Primzahlen sind.

(c) Wenn Sie ihre Funktion für größere n testen, werden Sie feststellen, dass die Berechnung sehr lange dauert. Der Algorithmus ist also nicht effizient. Überlegen Sie sich, ob Schritt 2 wirklich für alle Zahlen der Liste durchgeführt werden muss. Begründen Sie kurz ihre Antwort.

(d) Schreiben Sie nun eine Funktion `primfaktor(n)`, die eine Liste aller Primfaktoren von n ausgibt (z. B. `primfaktor(45) = [3, 3, 5]`). Verwenden Sie dazu Ihre Funktion `myprimes`.

(e) Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung von 444, 4620 und 665.

Besprechung in den Übungen vom 13.-17. November 2017.