

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 3. Übungsblatt

Aufgabe 10:

- (a) Berechnen Sie für $a \in \{-1, 0, 1\}$ jeweils die Stammfunktion F_a von

$$f_a(x) = \frac{1}{a - \sin(x)}.$$

- (b) Differenzieren Sie F_a und zeigen Sie, dass das Ergebnis mit f_a übereinstimmt.

Aufgabe 11:

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2} \quad \text{und} \quad g(x) = e^{x^2}.$$

- (a) Bestimmen Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

von f und zeigen Sie, dass dieser mit der Ableitung von f übereinstimmt.

- (b) Definieren Sie $h(x) := f(g(x))$. Bestimmen Sie die erste Ableitung von h mit Hilfe von f , g und deren Ableitungen. Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die Ableitung von h ohne diesen Umweg berechnen.
- (c) Wiederholen Sie Teil (b) für die zweite Ableitung von h .

Hinweis: Verwenden Sie in Teil (b) und (c) die Kettenregel und die Produktregel für Ableitungen und berechnen Sie die Ableitung für beliebige Funktionen f und g zunächst per Hand auf dem Papier.

Aufgabe 12:

Es seien zwei Funktionen f und g gegeben: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$

- (a) Differenzieren Sie mit Hilfe von `sympy` die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- (b) Differenzieren Sie mit Hilfe von `sympy` die Funktion

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x f(x-y)g(y) \, dy.$$

Können Sie beweisen, dass das Ergebnis richtig ist?

(b.w.)

Aufgabe 13:

Es sei

$$f(x) = \frac{\sin(2x) + 3}{\cos(2x) + 2}.$$

- (a) Welche Funktion F gibt `sympy` als Stammfunktion an?
- (b) Bestimmen Sie $F(\pi) - F(0)$.
- (c) Expandieren Sie f und nennen Sie die neue Funktion g . Bestimmen Sie nun $G(\pi) - G(0)$, wenn G die von `sympy` angegebene Stammfunktion von g ist.
- (d) Welchen Wert liefert `sympy` für das bestimmte Integral $\int_0^\pi g(x) dx$?
- (e) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^\pi g(x) dx$ numerisch.
- (f) Die Ergebnisse von (b), (c), (d) und (e) unterscheiden sich. Welche sind falsch und warum?
- (g) Zeichnen Sie den Graphen von G über einem zur Klärung der Frage (f) geeigneten Intervall.

Da die Übungen am 31. Oktober und am 01. November aufgrund der Feiertage entfallen, versuchen Sie in dieser Woche bitte eine andere Gruppe zu besuchen, um ihre Aufgaben vorzustellen. Wenn Sie zu keinem der anderen Termine können, ist auch eine Vorstellung in der darauffolgenden Woche möglich.

Besprechung in den Übungen vom 30. Oktober - 03. November 2017.