MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MAX SCHNEIDERS

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

25.01.2018

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 14. Übungsblatt

Aufgabe 57:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1$.

Zeigen Sie, dass es eine implizit erklärte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, g(x)) = 0$$

gibt.

Zeichen Sie diese implizite Funktion über dem Intervall $[-3, 2]$.

Aufgabe 58:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := x^2 \cdot (y + 1) + \frac{y}{2}.$$

(a) Zeichnen Sie die Funktion f.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 59:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := x^2 \cdot y.$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 3$.

(b) Berechnen Sie $\max\{f(x, y) : x^2 + y^2 = 3\}$ sowie $\min\{f(x, y) : x^2 + y^2 = 3\}$.

Hinweis:
Als Hilfe können Sie sich in der englischen Version von Wikipedia unter `Lagrange multiplier` das Beispiel 2 durchlesen.

Aufgabe 60:

Bestimmen Sie das Maximum der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 8xy$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$. Zeigen Sie, dass das Maximum von der Form $a + b\sqrt{c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ist.

(b.w.)

Aufgaben zur Wiederholung (ohne Wertung):

Aufgabe 61:

Bestimmen Sie $a := (10.5^{18}+2)^2+100-(10.5^{18}-2)^2$ ohne weitere Sicherheitsvorkehrungen. Es kommt 0 heraus.

Eine kurze Überlegung zeigt, dass dieses Ergebnis nicht richtig sein kann. Warum? Verwenden Sie ein geeignetes Verfahren, um einen genaueren Wert zu erhalten. Das Endergebnis sollte als Fließkommazahl ausgedrückt werden.

Aufgabe 62:

Sei $p(x) = 3x^5 - 2ax^3 + 12(a-5)x$, wobei $a = 6 + \sqrt{2}$. Bestimmen Sie den Wert von p an der größten kritischen Stelle von p. Der Wert soll so ausgegeben werden, dass man erkennen kann, ob er rational ist.

Aufgabe 63:

Es sei $f(x) = 1/(\sin^2(x) - 2)$. Das Ziel der Aufgabe besteht darin, $\int_{-\pi}^{\pi} f$ zu bestimmen. Versuchen Sie das auf die folgenden fünf Weisen:

(a) Berechnen Sie das bestimmte Integral direkt.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F und bilden Sie $F(\pi) - F(-\pi)$.

(c) Bilden Sie $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} F(x) - \lim\limits_{\substack{x\to-\pi \\ x>-\pi}} F(x)$.

(d) Berechnen Sie das Integral numerisch.

(e) Bestimmen Sie das Integral $2\int_0^{\pi} f$ mit der Methode für bestimmte Integrale.

Sie erhalten verschiedene Ergebnisse.

(f) Mit welchem der symbolischen Ergebnisse stimmt das numerische Ergebnis überein?

(g) Welche Ergebnisse sind unzutreffend und warum? Die Antwort bitte als Text oder Kommentar einsetzen.

Aufgabe 64:

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei die Funktion f gegeben durch

$$f(x, y, z) = (a(x+z)^2 + b(x+y)^2 + cz + 6)e^{-x}.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

(b) Für welche Werte von a, b und c verschwindet der Gradient an der Stelle $(1, 2, 3)$?

Aufgabe 65:

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 4\cos(x) - x$.

(a) Zeichnen Sie zuerst die Funktion, so dass man ihre positive Nullstelle gut erkennen kann.

(b) Lesen Sie aus der Zeichnung ein Intervall für die Nullstelle ab und bestimmen Sie dort die Nullstelle numerisch.

Aufgabe 66:

Es sei das folgende Polynom
$$P(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$$
gegeben. Zeichnen Sie die durch $P(x, y) = a$ für $a \in \{-\frac{1}{10}, 0, \frac{1}{10}\}$ gegebenen Kurven. Achten Sie darauf, die jeweiligen Achsenabschnitte so zu wählen, dass Sie zu aussagekräftigen Bildern kommen.

Hinweis: Die zu $a = 0$ gehörige Kurve ist das *kartesische Blatt*.

Aufgabe 67:

Die Kugelkoordinaten sind definiert durch
$$\Psi(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\sin(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix von Ψ. An welchen Punkten verschwindet sie?

Aufgabe 68:

Betrachten Sie die folgende Raumkurve
$$k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} -10\cos(t) - 2\cos(5t) + 15\sin(2t) \\ 15\cos(2t) + 10\sin(t) - 2\sin(5t) \\ 10\cos(3t) \end{pmatrix}.$$
Zeichnen Sie die Kurve und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

Aufgabe 69:

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = (2x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

(a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.

(b) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle die Hessematrix. Verwenden Sie dafür eine `for`-Schleife.

(c) Geben Sie für jede kritische Stelle an, ob sie eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle ist.

(d) Zeichnen Sie den Graphen von f so, dass man alle Extremalstellen gleichzeitig deutlich erkennen kann.

Besprechung in den Übungen vom 29. Januar-02. Februar 2018.