MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MAX SCHNEIDERS

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

18.01.2018

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 13. Übungsblatt

Aufgabe 52:

Es sei I_j die in der Vorlesung vorgestellte modifizierte Besselfunktion. Zeichnen Sie jeweils für $j \in \{0, \dots, 3\}$ die Funktionen I_j, I_j' und I_j'' über dem Intervall $[0, 2]$ in ein Bild.

Hinweis: Die Besselfunktionen sind nicht in der Bibliothek `numpy` enthalten, sondern in `mpmath` oder `scipy`. Das muss man beachten, wenn man `lambdify` verwenden will.

Aufgabe 53:

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1'' &= -\frac{8}{7}y_1 - \frac{1}{7}y_2, \qquad & y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \\ y_2'' &= -\frac{8}{7}y_2 - \frac{1}{7}y_1, \qquad & y_2(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0. \end{aligned}$$

Erstellen Sie eine aussagekräftige Zeichnung, indem Sie die beiden Komponentenfunktionen der Lösung in ein zweidimensionales Bild zeichnen. Machen Sie die Probe!

Aufgabe 54:

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{xy}$$

mit `dsolve`. Zeichnen Sie für $w_1 = 0$, $w_2 = \frac{1}{50}$ und $w_3 = \frac{1}{9}$ die Lösungen für die Anfangsbedingungen $y(1) = w_1, w_2, w_3$. Der besseren Übersicht halber beschränken Sie bitte den Wertebereich auf das Intervall $[0, 1]$.

Schneiden sich die Lösungen etwa? Dann überlegen Sie sich bitte, ob die Kurvenverläufe in Übereinstimmung mit dem Satz von Picard-Lindelöf stehen.

Fügen Sie nun zur Zeichnung das Richtungsfeld der Differentialgleichung hinzu.

Erklären Sie in wenigen Zeilen, welche Kurvenabschnitte nicht zur Lösung gehören und zeichnen Sie die Kurven jeweils über dem maximalen Teilintervall von $x \in [0, 2]$, über dem sie die Differentialgleichung auch tatsächlich lösen.

(b.w.)

Aufgabe 55:

Betrachten Sie erneut die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{xy}, \quad y(1) = 0,$$

aus Aufgabe 54. Diese Differentialgleichung ist eine Bernoullische Differentialgleichung, d. h. von der Form

$$y' + a(x)y + b(x)y^s = 0$$

für ein $s \neq 1$. Die positiven Lösungen einer solchen Bernoullischen Differentialgleichung haben die Form $f^{1/(1-s)}$, wobei f eine Lösung der assoziierten Differentialgleichung

$$w' + (1-s)a(x)w + (1-s)b(x) = 0$$

ist. Lösen Sie die korrespondierende Anfangswertaufgabe für die assoziierte Differentialgleichung. Überprüfen Sie, dass Sie auf diese Weise tatsächlich eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung gefunden haben.

Hinweis: Wenn Sie Aufgabe 54 gelöst haben, müssen Sie das ursprüngliche Anfangswertproblem nicht erneut lösen.

Aufgabe 56:

Berechnen Sie $\exp(xA)$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösen Sie damit die die homogene Differentialgleichung

$$y' = Ay, \quad y(0) = (1,1,1,1)^T$$

und die inhomogene Differentialgleichung

$$y' = Ay + (\sin(x), 0, x, 0)^T, \quad y(0) = (1,1,1,1)^T.$$

Machen Sie anschließend die Probe!

Hinweis: Verwenden Sie die Variation der Konstanten-Formel aus Aufgabe 51.

Besprechung in den Übungen vom 22.-26. Januar 2018.