Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Max Schneiders

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

11.01.2018

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 12. Übungsblatt

Aufgabe 48:

Wir betrachten das Katenoid

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, \cos(x_1)\cosh(x_2), \sin(x_1)\cosh(x_2)).$$

Berechnen Sie für die Matrix $G(x_1, x_2)$ mit Einträgen $g_{ij}(x_1, x_2) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_1, x_2), \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x_1, x_2)\rangle$ die Determinate $\det(G(x_1, x_2))$.

Aufgabe 49:

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' - \frac{y}{x} - x^2 - x^3 + 2x^4 = 0, \quad y(1) = y_0$$

für $y(1) = 1, 0, -1$. Zeichnen Sie die drei Lösungen in ein Bild. Wählen Sie den Bildausschnitt so, dass Sie ein aussagekräftiges Bild erhalten.

Erinnern Sie sich an den Satz von Picard-Lindelöf. Warum ist der offensichtliche Widerspruch der Zeichnung zu diesem Satz nur scheinbar?

Aufgabe 50:

(a) Die symmetrische (8×8)-Matrix A wird durch die folgenden Regeln gegeben. Die Indizes laufen von 0 bis 7. Auf der Diagonalen steht die Zahl 2. Die Elemente der Form $a_{j,j+1}$ für $j = 0, \ldots, 6$ sind alle gleich -1, ebenso das Element $a_{2,7}$. Alle anderen Einträge sind Null. Konstruieren Sie diese Matrix durch einen Befehl der Form `A = Matrix(8,8,f)` für eine von Ihnen zu schreibende Funktion `f`.

(b) Lesen Sie die Datei `B.txt` von der Homepage ein. Diese Datei enthält die korrekte Lösung für Aufgabenteil a). Vergleichen Sie in `sympy` Ihre Lösung mit der Lösung aus der Textdatei und bessern Sie ihre Funktion solange nach, bis das Ergebnis stimmt.

(c) Berechnen Sie A^{-1} und speichern Sie diese Matrix zusammen mit der Matrix A in der Datei `A.txt` ab. Lesen Sie die Datei zur Überprüfung noch einmal ein und lassen Sie sich die Matrizen anzeigen.

Aufgabe 51:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine hinreichend glatte Abbildung.

Zeigen Sie mit `sympy`, dass durch

$$y(x) = \mathrm{e}^{xA} y_0 + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-s)A} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$$

eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

definiert wird.

Besprechung in den Übungen vom 15.-19. Januar 2018.