Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Max Schneiders

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

21.12.2017

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 11. Übungsblatt

Aufgabe 43:

Es sei die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie $M \cdot M^T$ und $M^T \cdot M$ und bestimmen Sie deren Determinante.

(b) Sei S diejenige Matrix, die aus $M \cdot M^T$ entsteht, wenn man die äußeren Zeilen und Spalten streicht, d. h. S ist der innere 2×2 Block von $M \cdot M^T$. Berechnen Sie $S^2 \cdot (M^T \cdot M)^{-1}$.

(c) Sei $T := M \cdot M^T + D$, wobei D die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $[0, 1+2t, 1-3t, 0]$ ist. Bestimmen Sie, für welche Werte von t die Determinante von T verschwindet.

Aufgabe 44:

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x(y^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und die Werte an diesen Stellen.

(b) Färben Sie für jede dieser Stellen des Graphen so ein, dass man das Verhalten erkennen kann.

Hinweis: Verwenden Sie `Normalize`. Es sind mehrere Bilder notwendig.

(c) Markieren Sie alle kritischen Stellen im Graphen mit einem schwarzen Kreuz.

(d) Überprüfen Sie die Vermutungen aus Teil b) durch Nachrechnen.

Aufgabe 45:

(a) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ auf der z-Achse liegt, wenn $x_3 = y_3 = 0$ gilt.

(b) Für welche Werte a hat das von den Vektoren $u = (1, 2)^T$ und $v = (3, a)^T$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 5? Verwenden Sie zur Lösung dieser Aufgabe das Kreuzprodukt.

(b.w.)

Aufgabe 46:

Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

(a) Zeichen Sie den Graphen von f über der Kreisscheibe vom Radius 3.

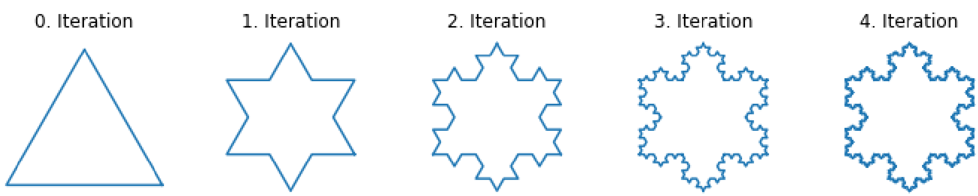
Hinweis: Um über die Kreisschreibe zu plotten, setzen sie alle Werte, die außerhalb der Kreisscheibe liegen auf den Wert `np.nan`. Diese Werte werden dann beim Plotten ignoriert.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f. Welche geometrische Gestalt haben die Lösungen? Wurden alle Lösungen gefunden? Begründen Sie kurz ihre Antwort.

(c) Zeichnen Sie die gefundenen Lösungen aus Teil b) in ein Bild.

Aufgabe 47:

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Im ersten Schritt teilt man jede Seite in drei gleich lange Strecken und setzt auf das mittlere Drittel ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten genauso lang sind, wie die Teilstrecken der Ausgangsseite. Nun wiederholt man dieses Vorgehen für die neuen Seiten. Die durch weitere Iterationen entstehende Figur bezeichnet man als *Kochsche Schneeflocke*.



Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `koch(n)`, die iterativ die Eckpunkte der Kochschen Schneeflocke berechnet. Zeichnen Sie dann mit Hilfe dieser Funktion die ersten 4 Iterationen der Kochschen Schneeflocke.

Hinweis: Beginnen Sie mit der Berechnung des gleichseitigen Dreiecks. Nehmen Sie sich dann je zwei benachbarte Punkte und überlegen Sie sich, wie sie mit Hilfe dieser beiden Punkte die drei neuen Punkte des aufgesetzten gleichseitigen Dreiecks berechnen können. Achten Sie außerdem darauf, dass Sie die Punkte in der richtigen Reihenfolge speichern, damit Sie diese anschließend problemlos zeichnen können. Die Grafik unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve` im Abschnitt Konstruktion kann behilflich sein.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2018!

Besprechung in den Übungen vom 8.-12. Januar 2018.