MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

15. 2. 2016

Schriftliche Prüfung zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

(PO 2014: Erste Klausur / PO 2008: Klausur)

Bitte folgende Angaben ergänzen und **DEUTLICH LESBAR** in Druckbuchstaben schreiben:

Name: .... Vorname: ....

Matrikel-Nr.: .... Studienfach: ....

Fachsemester: ....

Account zur Klausur: .... Nummer des Computers: ....

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im WS 2015/2016 erworben habe,

☐ an einer schriftlichen Prüfung zur Computergestützten Mathematik zur Analysis bei .... im WS/SS .... teilgenommen, aber nicht bestanden habe,

☐ die Zulassung zur Prüfung im WS/SS .... erworben habe.

....
Unterschrift

Hinweise: WICHTIG !

- In Ihrem Home-Verzeichnis finden Sie die Dateien `WerBinIch.txt`, sowie `Aufgabe1.mw`,
  `Aufgabe2.mw`, `Aufgabe3.mw`, `Aufgabe4.mw` und `Aufgabe5.mw`.
- Ergänzen Sie zuerst die Datei `WerBinIch.txt` mit Ihrem Namen, Vorname, usw.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, die in Dateien mit jeweils dem zur Aufgabe passenden Namen in Ihrem Home-Verzeichnis gespeichert sind. Speichern Sie daher in kurzen Abständen Ihre Lösungen, um ggf. den Verlust von Daten zu vermeiden, falls `Maple` einmal abstürzt.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, bei denen der Lösungsweg (mit `Maple`) klar zu erkennen ist.
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten.
- Zum Bestehen dieser Klausur sind **15** Punkte hinreichend.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
max. Punkte	6	6	6	6	6	30
err. Punkte						

Hinweise: Sie benötigen eventuell die Pakete `plots`, `LinearAlgebra` und `VectorCalculus`.
Nützlich sind die Befehle `VectorNorm` und `MatrixInverse`.
`legend` ist eine Option für die meisten plot-Befehle. In `Maple` steht der Ausdruck `Pi` für die Kreiszahl und `I` für die imaginäre Einheit.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

(a) Differenzieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \cos(x) \exp(1 + x^{-3}) \ln(x^3 - 1)$$

und fassen Sie die Terme sinnvoll zusammen.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \ln(x^2 + 1) + (x + 1)(x - 2)x.$$

(a) Zeichnen Sie die Graphen von f, f' und f'' über dem Intervall $[-2, 3]$ in eine gemeinsame Grafik in festgelegten Farben mit einer Legende.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und stellen Sie fest, um welchen Typ es sich jeweils handelt.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 2$ und plotten sie den Graphen zusammen mit der Tangente in eine Grafik. Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Tangente mit dem Graphen von f.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Sei $K_p := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$ und

$$A := \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie K_p, $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \infty$ in einen gemeinsamen Plot in verschiedenen Farben und mit einer aussagekräftigen Legende.

(b) Zeichnen Sie $\{Ax \mid x \in K_2\}$ und $\{x \mid Bx \in K_2\}$ in einen gemeinsamen Plot in verschiedenen Farben und mit einer aussagekräftigen Legende, **ohne** den Befehl `implicitplot` zu verwenden.

(c) Fügen Sie den Gradienten der Funktion

$$f := x \mapsto \|A^{-1}x\|_2$$

in Ihrer Zeichnung aus (b) als Vektorfeld hinzu.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x| + (\cos(x))^3$ und

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, \mathrm{d}t, \qquad k \geq 0.$$

(a) Berechnen Sie für $k = 0, \ldots, 15$ die Werte von a_k.

(b) Berechnen Sie für $n = 1, 4, 7, 10, 15$ die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx).$$

(c) Zeichnen Sie f, f_1, f_4 und f_7 über dem Intervall $[-\pi, \pi]$ in eine gemeinsame Grafik in unterschiedlichen Farben.

(d) Berechnen Sie für $n \in \{1, 4, 7, 10, 15\}$ und $a \in \{\frac{l}{\pi} \mid l = 0, 1, 2, 3\}$ jeweils die Werte $|f(a) - f_n(a)|$ numerisch und stellen Sie diese übersichtlich dar.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Gesucht ist eine Lösung $y : [0, T] \to \mathbb{C}$ von

$$iy' = y(|y|^2 + 1), \qquad y(0) = 1,$$

wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet.

(a) Lösen Sie die obige Differentialgleichung.

(b) Plotten Sie für $x \in [0, 4\pi]$ den Real- und Imaginärteil der Lösung gegen x.

(c) Plotten Sie die durch $x \mapsto y(x)$ parametrisierte Kurve in der komplexen Ebene.