III Variationelle Formulierung elliptischer Randwertprobleme

§ 1 Das Lax-Milgram Lemma, schwache Formulierung

<u>Erinnerung</u>

$$(*) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

Ω stw C^1 berandet beschränkt, f stetig

Falls $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ $(*)$ erfüllt, so wird u klassische Lösung von $(*)$ genannt. Diese klassische Lösung ist eine Lösung des Variationsproblems

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \qquad V = C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$$

für $J(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - \ell(u)$

mit $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$ und

$\ell(v) = \int_\Omega f v \, dx$

V ist ein Prähilbertraum mit Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$ und davon induzierter Norm $\|\cdot\|_a = a(\cdot,\cdot)^{1/2}$

$\ell : V \to \mathbb{R}$ ist eine beschränkte / stetige Linearform

d.h. $\ell(v) \leq C \|v\|_a$

<u>Frage</u>: Existiert ein $u \in V$ mit $J(u) = \min_{v \in V} J(v)$

Bsp: Existiert ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{Q}} (y^2 - 2)$?

(1.0) Definitionen / Erinnerungen / Beispiele

i) Sei $(V, \|\ \|)$ ein normierter Raum. Eine Menge $M \subseteq V$ heißt dicht (bzgl der $\|\ \|$-Topologie) falls

$$\forall v \in V \quad \exists (v_n)_n \subseteq M \quad v_n \xrightarrow{\|\ \|} v$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v$$

ii) Ein normierter Raum $(V, \| \|)$ heißt Präbanachraum
Ein (normierter) Raum mit Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$ und davon induzierter Norm $(V, a(\cdot,\cdot))$ heißt Prähilbertraum

iii) Ein vollständiger Prähilbertraum heißt Hilbertraum
Ein vollständiger Präbanachraum heißt Banachraum

$\ulcorner$ vollständig $:\Leftrightarrow$ $(v_n)_n$ Cauchyfolge in $(V, \| \|)$
$\Rightarrow$ es existiert $v \in V$ mit
$\| \| - \lim_{n \to \infty} v_n = v$ $\lrcorner$

iv) Beispiele

$\mathbb{Q}^n$

$\mathbb{R}^n$

$C([0,1])$ $\quad \| \|_\infty$

$L^p([0,1])$ $\quad \| \|_p$

$P([0,1])$ Polynome

Falls
Da $J(v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_a^2 - C \|v\|_a$ für eine Konstante C

$\ulcorner$
$$\int_\Omega f \cdot v \leq \sup_\Omega f \int_\Omega v \underset{\uparrow}{\leq} C \left(\int (\|\nabla v\|)^2 \right)^{1/2}$$
später

existiert eine Folge $(v_n)_n \subseteq V$ mit

$$\lim_{n \to \infty} J(v_n) = \inf_{v \in V} J(v) =: c$$

(1.1) <u>Satz</u> Die Folge der $(v_n)_n \subseteq V$ mit $\lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v\in V} J(v)$ ist eine Cauchyfolge.

<u>Beweis</u>: Für $\varepsilon > 0$ existiert N mit

$$|J(v_n) - c| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |J(v_m) - c| < \varepsilon \quad \text{für } m,n > N$$

Dann ist

$$J(v_n) - J(v_m) = \tfrac{1}{4} a(v_n - v_m, v_n - v_m)$$

$$+ a\left(\frac{v_n+v_m}{2}, \frac{v_n+v_m}{2}\right) - a(v_m, v_m)$$

$$- 2\ell\left(\frac{v_n+v_m}{2}\right) + 2\ell(v_m)$$

$$= \tfrac{1}{4}\|v_n - v_m\|_a^2 + 2J\left(\frac{v_n+v_m}{2}\right) - 2J(v_m)$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{4}\|v_n - v_m\|_a^2 = J(v_n) + J(v_m) - 2J\left(\frac{v_n+v_m}{2}\right)$$

Andererseits

$$2c \leq 2J\left(\frac{v_n+v_m}{2}\right) \leq J(v_m) + J(v_n) \leq 2c + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{4}\|v_n - v_m\|_a^2 = J(v_n) - c + J(v_m) - c - 2J\left(\frac{v_n+v_m}{2}\right) + 2c$$

$$\leq |J(v_n) - c| + |J(v_m) - c| + \left|2c - 2J\left(\frac{v_n+v_m}{2}\right)\right|$$

$$\leq 4\varepsilon$$

□

Wäre also V vollständig, so würde jede Cauchyfolge konvergieren. Deswegen vervollständigen wir V zu einem Hilbertraum $\overline{V}^{\|\cdot\|}$ durch "Hinzunahme der Grenzwerte von Cauchyfolgen".

(1.2) <u>Satz</u> Ist V ein Prähilbertraum mit Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$. Dann existiert (bis auf Isometrie) genau ein Hilbertraum $\overline{V}^{\|\cdot\|_a}$ in dem V dicht liegt und für dessen Skalarprodukt $\overline{a}$ gilt $\overline{a}|_{V\times V} = a$

(Vervollständigung ist etwas anderes als der topologische Abschluss !!)

<u>Beweis</u> Funktionalanalysis / Topologie

Beweisidee

$\overline{V}^{\|\,\|_a}$:= Raum der Äquivalenzklassen der Menge der Cauchyfolgen bzgl. der Äquivalenzrelation

$(v_n)_n \sim (w_n)_n :\Leftrightarrow (v_n - w_n)_n$ Nullfolge in $\|\;\|_a$

(1.3) <u>Satz</u> Sei $(\overline{V}^{\|\,\|}, \|\;\|)$ Hilbertraum, V dichter Unterraum von $\overline{V}^{\|\,\|}$ und $\ell : V \to \mathbb{R}$ linear und beschränkt.

Dann existiert genau eine beschränkte Linearform $\overline{\ell} : \overline{V}^{\|\,\|} \to \mathbb{R}$ mit $\overline{\ell}\,|_{V^{\|\,\|}} = \ell$

<u>Beweis</u> $v \in V$ beliebig. Dann ex $(v_n)_n \subseteq V$

mit $v = \|\;\| - \lim\limits_{n\to\infty} v_n$

Da $| \ell(v_n) - \ell(v_m) \| = | \ell(v_n - v_m) | \leq C \| v_n - v_m \|$

ist $(\ell(v_n))_n$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$

$\overline{\ell}(v) := \lim\limits_{n\to\infty} \ell(v_n)$ existiert und die

Abbildung $\overline{\ell} : \overline{V}^{\|\,\|} \to \mathbb{R}$ ist linear und beschränkt

(1.4) <u>Definition</u> $\|v\|_H \leq C \|v\|_V$

Sei jetzt $(\overset{H}{V}, \|\;\|_{\overset{H}{V}})$ zwei Hilberträume $V \hookrightarrow H$ stetig

Eine Bilinearform $a : H \times H \to \mathbb{R}$ heißt <u>stetig</u>, falls ein $M > 0$ existiert, sodass

$| a(u,v) | \leq M \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall\, u, v \in H$

Eine symmetrische stetige Bilinearform heißt V-elliptisch falls $a(v,v) \geq \|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V$