Algorithmus der QR-Zerlegung

Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Einträgen a_{ij}
Gesucht: QR-Zerlegung von A (A wird überschrieben)

Verwende folgende Notation:

$$A(k:m,j) = \begin{pmatrix} a_{kj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \qquad I_d = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

for $k = 1, \ldots, n$

$$\alpha = -\mathrm{sign}(a_{kk}) \cdot \|A(k:m,k)\|_2$$
$$e_1 = (1, 0, \ \ldots \ , 0)^T \in \mathbb{R}^{m-k+1}$$
$$u_k = A(k:m,k) - \alpha e_1$$
$$\tilde{Q}_k = I_{m-k+1} - \frac{u_k u_k^T}{\alpha(\alpha - a_{kk})} \in \mathbb{R}^{(m-k+1)\times(m-k+1)}$$
$$Q_k = \left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{Q}_k \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

for $j = k+1, \ldots, n$

$$A(k:m,j) = A(k:m,j) - \frac{\langle A(k:m,j)\ ,\ u_k \rangle}{\alpha(\alpha - a_{kk})} u_k$$

end

$$A(k:m,k) = \alpha e_1$$

end

$R = A$

$Q = Q_1 \cdots Q_n$

Bei der Implementierung muss man nicht Q_k speichern, sondern nur den dazugehörigen Vektor u_k.