Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra

Singulärwertzerlegung

Achim Schädle

Übungsleiter: Lennart Jansen

Tutoren: Marina Fischer, Kerstin Ignatzy, Narin Konar
Pascal Kuhn, Nils Sänger, Tran Dinh

8. Januar 2015

Symmetrische Matrizen

Erinnerung: Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, dann gilt

- alle Eigenwerte von A sind reell
- es gibt eine Orthonormalbasis $\{q_1, \ldots, q_n\}$ von Eigenvektoren von A:

$$Q^T A Q = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

  wobei $Q = [q_1 \mid \ldots \mid q_n]$ orthogonal ($Q^T Q = Q Q^T = I$)
- Es gilt: $\mathrm{Rang}(A) = p$ genau dann, wenn genau p Eigenwerte λ_j von Null verschieden sind.

Eigenschaften von $A^T A$

Lemma. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geq n$.

1. $A^T A$ ist symmetrisch und positiv semidefinit.
2. $A^T A$ ist genau dann positiv definit, wenn $\mathrm{kern}(A) = \{0\}$.
3. In jedem Fall gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{kern}(A^T A) &= \mathrm{kern}(A) \\ \mathrm{bild}(A^T A) &= \mathrm{bild}(A^T) = \mathrm{kern}(A)^\perp \end{aligned}$$

Beweis

- $A^T A$ symmetrisch ist offensichtlich. Ferner ist

$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = ||Ax||^2 \geq 0 \quad \text{für alle } x,$$

d.h. $A^T A$ positiv semidefinit und $\mathrm{kern}(A^T A) \subset \mathrm{kern}(A)$. Wegen $\mathrm{kern}(A) \subset \mathrm{kern}(A^T A)$ folgt $\mathrm{kern}(A^T A) = \mathrm{kern}(A)$.

- $\mathrm{bild}(A^T A) \subset \mathrm{bild}(A^T)$ ist klar, Gleichheit folgt aus

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{bild}(A^T A) &= n - \dim \mathrm{kern}(A^T A) = n - \dim \mathrm{kern}(A) \\ &= \mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{bild}(A) = \dim \mathrm{bild}(A^T). \end{aligned}$$

- Seien $z \in \mathrm{bild}(A^T)$ und $x \in \mathrm{kern}(A)$ beliebig, dann gibt es $y \in \mathbb{R}^m$ mit $z = A^T y$ und $x^T z = x^T A^T y = (Ax)^T y = 0$.

Singulärwertzerlegung

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geq n$ mit $\mathrm{Rang}(A) = p$. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien die absteigend sortierten Eigenwerte von $A^T A$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p > \lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

und $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sei eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren (von $A^T A$). Definiere

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

dann gilt

$$u_i^T u_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (A v_i)^T A v_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} v_i^T (A^T A) v_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} v_i^T v_j = \delta_{ij}$$

Singulärwertzerlegung II

Damit ist $\{u_1, \ldots, u_p\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Bild}(A)$, denn

$$\dim \mathrm{bild}(A) = \dim \mathrm{bild}(A^T A) = \mathrm{rang}(A^T A) = p$$

Ergänze diese durch weitere $m - p$ Vektoren $u_{p+1}, \ldots, u_m$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$. Diese Vektoren spannen $\mathrm{bild}(A)^\perp = \mathrm{kern}(A^T)$ auf:

$$\begin{aligned} A^T u_i &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A^T A v_i = \sqrt{\lambda_i} v_i, && i = 1, \ldots, p \\ A^T u_i &= 0 && i = p+1, \ldots, m \end{aligned}$$

Singulärwertzerlegung III

Definition und Satz. Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = p$ besitzt eine Singulärwertzerlegung, d.h. ein System

$$\{\sigma_i, u_j, v_k \mid i = 1, \dots, p,\ j = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, n\}$$

mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots, \geq \sigma_p > 0$ und Orthonormalbasen $\{u_j\}_{j=1}^m$ und $\{v_k\}_{k=1}^n$ des $\mathbb{K}^m$ bzw. $\mathbb{K}^n$, wobei

$$\begin{aligned} Av_i &= \sigma_i u_i, & A^T u_i &= \sigma_i v_i, & i &= 1, \dots, p, \\ Av_k &= 0, & A^T u_j &= 0, & j, k &> p \end{aligned}$$

σ_i heißen Singulärwerte von A, v_i rechte und u_i linke Singulärvektoren.

Singulärwertzerlegung IV

In Matrizenschreibweise:

$$U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m,m}, \qquad V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n,n}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \sigma_p & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dann gilt $U^T U = I$, $V^T V = I$ und

$$A = U\Sigma V^T, \qquad A^T = V\Sigma^T U^T, \qquad \Sigma = U^T A V,$$

$$A = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i u_i v_i^T, \qquad A^T = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i v_i u_i^T$$

Geometrische Interpretation

Durchlaufen die Vektoren

$$x = \alpha_i v_i + \alpha_j v_j + \alpha_k v_k, \qquad ||x||^2 = \alpha_i^2 + \alpha_j^2 + \alpha_k^2 = 1$$

die Einheitskugel des Unterraums $\text{span}\{v_i, v_j, v_k\}$, dann durchlaufen ihre Bilder

$$Ax = \sigma_i \alpha_i u_i + \sigma_j \alpha_j u_j + \sigma_k \alpha_k u_k, = \beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_k u_k,$$

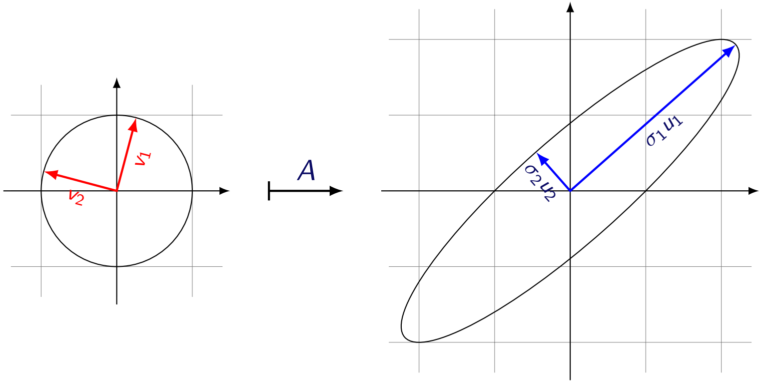
ein Ellipsoid in dem durch u_i, u_j und u_k aufgespannten Teilraum des $\mathbb{R}^m$, denn

$$\frac{1}{\sigma_i^2}\beta_i^2 + \frac{1}{\sigma_j^2}\beta_j^2 + \frac{1}{\sigma_k^2}\beta_k^2 = \alpha_i^2 + \alpha_j^2 + \alpha_k^2 = 1$$

(Ellipsoid mit Scheitelpunkten $(\pm\sigma_i, 0, 0)$, $(0, \pm\sigma_j, 0)$, $(0, 0, \pm\sigma_k)$ in den zu (u_i, u_j, u_k) gehörenden Koordinaten.)

Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$ Matlab: `[U,S,V] = svd(A)`



Eigenwert- / Singulärwertzerlegung

Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ diagonalisierbar gibt es $X \in \mathbb{C}^{n,n}$ nicht singulär mit

$$A = X\Lambda X^{-1}, \qquad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n,n}$$

Für $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ beliebig gibt es orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m,m}$, $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit

$$A = U\Sigma V^T, \qquad \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{m,n}$$

mit $\sigma_i \geq 0$.

Anwendung

Satz. Sei $A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$ und $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$. Dann gilt

$$||A - A_k||_2 \leq ||A - B||_2$$

für alle Matrizen B mit $\operatorname{rang} B = k$ und $||A - A_k|| = \sigma_{k+1}$.
Es gilt auch $A_k = U\Sigma_k V^T$ mit $\Sigma_k = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, k)$

Anwendung: Datenkompression

Vektornormen

Definition:

Eine Abbildung $||\cdot|| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ heißt Vektornorm, wenn

1. $||x|| \geq 0$ für alle x und $||x|| = 0 \iff x = 0$ (Positivität)
2. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung)
3. $||\alpha x|| = |\alpha| \ ||x||$

Eine Abbildung $||\cdot|| : \mathbb{C}^{m,n} \to \mathbb{R}$ heißt Matrixnorm, wenn $||\cdot||$ eine Vektornorm ist und zusätzlich

4. $||AB|| \leq ||A|| ||B||$ für alle A, B für die AB existiert

Beispiele/Aufgabe

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `plotnorm(p)`, welche die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_p \leq 1\}$ plottet.

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x^T x}$$

$$||x||_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

Induzierte Matrixnormen

Seien $||\cdot||_{(n)}$ und $||\cdot||_{(m)}$ Vektornorm über $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Durch

$$||A||_{(m,n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{||Ax||_{(m)}}{||x||_{(n)}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,||x||=1} ||Ax||_{(m)}$$

wird eine (von einer Vektornorm) induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{m,n}$ definiert.

Beispiele: $||A||_1$ und $||A||_\infty$

Sei $A = [a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n] \in \mathbb{C}^{m,n}$ und $||x||_1 = 1$:

$$||Ax||_1 = ||\sum_{j=1}^{n} x_j a_j||_1 \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| ||a_j||_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} ||a_j||_1$$

Damit: $||A||_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} ||a_j||_1$

Für $x = e_k$, wobei k so, dass $||a_k||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} ||a_j||_1$, gilt Gleichheit, also

$$||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} ||a_j||_1 \qquad \text{maximale Spaltensummennorm}$$

analog:

$$||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} ||A(i,:)^T||_1 \qquad \text{maximale Zeilensummennorm}$$