Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra

Erinnerungen an die Lineare Algebra

Achim Schädle

Übungsleiter: Lennart Jansen

Tutoren: Marina Fischer, Kerstin Ignatzy, Narin Konar
Pascal Kuhn, Nils Sänger, Tran Dinh

27. November 2014

Vektorräume

1. $\mathbb{P}_m := \left\{ \sum_{i=0}^m a_i X^i | a_i \in \mathbb{R} \right\}$

   Addition:

   $p + q := \sum_{i=0}^m (p_i + q_i) X^i$ für $p := \sum_{i=0}^m p_i X^i$ und $q := \sum_{i=0}^m q_i X^i$

   Skalarmultiplikation:

   $\alpha \cdot p := \sum_{i=0}^m (\alpha p_i) X^i$ für $p := \sum_{i=0}^m p_i X^i$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Reelle 2×2 Matrizen

   Addition:

   $A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^2$ für $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ und $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ $(a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R})$

   Skalarmultiplikation:

   $\alpha \cdot A := (a_{ij})_{i,j=1}^2$ für $A = (\alpha a_{ij})_{i,j=1}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vektorräume?

1. Für jedes m ist $\mathbb{P}_m$ ein $\mathbb{R}$ Vektorraum.
2. Der Raum der reellen 2×2 Matrizen ist ein $\mathbb{R}$ Vektorraum.
3. Der Raum der reellen symmetrischen 2×2 Matrizen ist ein $\mathbb{R}$ Vektorraum.
4. Der Raum der reellen orthogonale 2×2 Matrizen ist ein $\mathbb{R}$ Vektorraum.

Tippen sie die Nummern der Aussagen denen sie zustimmen ein.
Sie haben bis zu 4 Stimmen.

Lineare (Un-)Abhängigkeit

Definition

Eine Menge von n Vektoren $M = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ heißt *linear unabhängig* falls gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = O \;\Rightarrow \alpha_j = 0 \text{ für alle } j = 1, \ldots, n$$

Definition

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt *Basis*.

Definition

Die Anzahl der Elemente einer Basis eines Vektorraums heißt *Dimension* des Vektorraums

Welche Dimension hat der Vektorraum der symmetrischen 4×4 Matrizen?

Lineare Abbildungen

Definition

Seien U, V zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Eine Abbildung $A : U \to V$ heißt *linear*, falls

- $A(u + v) = A(u) + A(v)$
- $A(\alpha u) = \alpha A(u)$

für alle Vektoren $u, v \in U$ und reelle α gilt.

Welche Abbildungen sind linear?

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-y, x)$
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (xy, 0)$
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - y$
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$

Bilinearformen

Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $a : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Bilinearform*, falls

- $a(u, v + w) = a(u, v) + a(u, w)$
- $a(u + w, v) = a(u, v) + a(w, v)$
- $a(\alpha u, v) = \alpha a(u, v)$
- $a(u, \alpha v) = \alpha a(u, v)$

für alle Vektoren u, v, w und reelle α gilt.

Skalarprodukt / inneres Produkt

Definition

Eine symmetrische positiv definite Bilinearform ist ein *Skalarprodukt*.

Beispiel:
Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$(u, v) \mapsto \sum_{k=1}^{n} u_k v_k =: \langle u, v \rangle := u^T v$$

ein Skalarprodukt. (Das euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$)

Skalarprodukte?

1. $(A, B) \mapsto A : B := \sum_{i,j}^{n} a_{ij} b_{ij}$ ist ein Skalarpodukt auf dem Vektorraum der $n \times n$ Matrizen.
2. $(A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB^T)$ ist ein Skalarpodukt auf dem Vektorraum der $n \times n$ Matrizen.
3. Was ist die Spur?

Skalarprodukt ?

1. $(p,q) \mapsto \int_0^1 p(t)q(t)dt$ ist ein Skalarpodukt auf $\mathbb{P}_m$

Evaluation Zeitaufwand

Evaluation Tempo der Vorlesung