Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra

Erinnerungen an LinA Teil II

Achim Schädle

Übungsleiter: Lennart Jansen

Tutoren: Marina Fischer, Kerstin Ignatzy, Narin Konar
Pascal Kuhn, Nils Sänger, Tran Dinh

18. Dezember 2014

Bilinearformen

Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\mathrm{a} : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt *Bilinearform*, falls

- $\mathrm{a}(u, v + w) = \mathrm{a}(u, v) + \mathrm{a}(u, w)$
- $\mathrm{a}(u + w, v) = \mathrm{a}(u, v) + \mathrm{a}(w, v)$
- $\mathrm{a}(\alpha u, v) = \alpha\, \mathrm{a}(u, v)$
- $\mathrm{a}(u, \alpha v) = \alpha\, \mathrm{a}(u, v)$

für alle Vektoren u, v, w und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt.

Sesquilinearformen

Definition

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\mathrm{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *Sesquilinearform*, falls

- $\mathrm{a}(u, v + w) = \mathrm{a}(u, v) + \mathrm{a}(u, w)$
- $\mathrm{a}(u + w, v) = \mathrm{a}(u, v) + \mathrm{a}(w, v)$
- $\mathrm{a}(\alpha u, v) = \alpha\, \mathrm{a}(u, v)$
- $\mathrm{a}(u, \alpha v) = \overline{\alpha}\, \mathrm{a}(u, v)$

für alle Vektoren u, v, w und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt.

Skalarprodukt / inneres Produkt

Definition

Eine Bilinearform $\mathrm{a} : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt symmetrisch, falls

$$\mathrm{a}(u, v) = \mathrm{a}(v, u)$$

Eine Sesquilinearform $\mathrm{a} : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt hermitesch falls

$$\mathrm{a}(u, v) = \overline{\mathrm{a}(v, u)}$$

Gilt zusätzlich $\mathrm{a}(u, u) \geq 0$ und folgt aus $\mathrm{a}(u, u) = 0$, dass $u = 0$ ist, so heißt die Bilinearform/Sesquilinearform *positiv definit*.

Definition

Eine symmetrische positiv definite Bilinearform oder eine hermitesche positive definite Sesquilinearform ist ein *Skalarprodukt*.

Beispiele

Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$(u, v) \mapsto \sum_{k=1}^{n} u_k v_k =: \langle u, v \rangle := u^T v$$

ein Skalarprodukt. (Das euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$)
Für $u, v \in \mathbb{C}^n$ ist

$$(u, v) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_k v_k =: \langle u, v \rangle := u^H v$$

ein Skalarprodukt.

Skalarprodukte

Auf dem Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich k, $\mathbb{P}_k$, sei

$$(p, q) \mapsto \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

Ist diese Abbildung ein Skalarprodukt?

Norm

Definition

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für ein $x \in V$ ist $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die Länge oder *Norm* von x.

Beispiel:
Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

die euklidische Länge von x.

Unitäre und Orthogonale Abbildungen

Definition

Sei A eine lineare Abbildung auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Falls $||A(x)|| = ||x||$ für alle $x \in V$ gilt, so heißt A orthogonal.

Definition

Sei A eine lineare Abbildung auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Falls $||A(x)|| = ||x||$ für alle $x \in V$ gilt, so heißt A unitär.

Beispiele

Welche der folgenden linearen Abbildungen sind orthogonal bzw. unitär. Geben sie die entsprechende Nummer ein.

1. In $\mathbb{R}^2$ die Drehung gegeben durch die Matrix

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

2. In $\mathbb{C}^3$ die Projektion auf die (x, y)-Ebene

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$

3. In $\mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der (x, y)-Ebene

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$$

Noch mehr Fragen

Geben sie die Nummer der Aussage ein, der sie zustimmen.

1. Eine lineare Abbildung ist invertierbar genau dann wenn sie unitär ist.
2. Jede orthogonale lineare Abbildung ist invertierbar.
3. Sind alle Eigenwerte einer Matrix 1, so ist die Matrix orthogonal.
4. Ist Q orthogonal so gilt $\langle Qu, Qv \rangle = \langle u, v \rangle$.