Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra

Lösung linearer Gleichungssysteme

Achim Schädle

Übungsleiter: Lennart Jansen

Tutoren: Marina Fischer, Kerstin Ignatzy, Narin Konar
Pascal Kuhn, Nils Sänger, Tran Dinh

4. + 11. Dezember 2014

Lineare Abbildungen und Matrizen: Fragestellungen

Eigenschaften von Matrizen

- $\text{kern}(A) = \{v \in V \mid Av = 0\} \subseteq V$
- $\text{bild}(A) = \{w \in W \mid \exists v \in V, Av = w\} \subseteq W$
- Basen für $\text{kern}(A)$ und $\text{bild}(A)$
- $\text{rang}(A) = \dim(\text{bild}(A))$
- Falls $n = m$, ist $A \in \text{Gl}(n)$? Existiert A^{-1}?
- Zu $A \in \text{Gl}(n)$ löse

$$Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^n$$

- Zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ finde $x \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\|Ax - b\|_2 \to \min$$

Lösung mit Hilfe der Zeilenstufenform

Die Lösung von $Ax = b$ ist gegeben durch $x = A^{-1}b$

Ansatz: Berechne A^{-1} mit Hilfe der spez. Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} Z_A & E_l \cdots E_2 E_1 I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

Berechne $x = A^{-1}b$.

Da $A^{-1} = E_l \cdots E_2 E_1$ (E_i Elementarmatrix), ist

$$A^{-1}b = E_l \cdots E_2 E_1 b.$$

Statt A^{-1}, berechne direkt spez. Zeilenstufenform von

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} Z_A & E_l \cdots E_2 E_1 b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1}b \end{array}\right]$$

Gauß-Elimination

Elementarmatrizen

Definition Matrizen der Form $E = I - uv^T$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u^T v \neq 1$ heißen Elementarmatrizen.

$$uv^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1, \dots v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{bmatrix}$$

$$v^T u = \begin{bmatrix} v_1, \dots, v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

E ist invertierbar, $E^{-1} = I - \frac{1}{v^T u - 1} uv^T$

Spezielle Elementarmatrizen

- Multiplikation der i-ten Zeile mit $\alpha \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$$E = I - (1-\alpha)e_i e_i^T$$

- Addition der i-ten Zeile zur j-ten Zeile

$$E = I + e_j e_i^T$$

- Addition des α-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile

$$E = I + \alpha e_j e_i^T$$

- Vertausche i-te und j-te Zeile

$$E = I - uu^T, \qquad u = e_i - e_j$$

Zeilenstufenform

Erinnerung: Jede Matrix kann durch elementare Zeilenumformungen (oder äquivalent durch Multiplikation von links mit Elementarmatrizen) auf Zeilenstufenform Z transformiert werden:

$$A \to Z = \begin{bmatrix} \otimes & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \otimes & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \otimes & \times & \times & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \otimes & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\otimes$ = Pivotelemente $\neq 0$

Zeilenstufenform II

Eigenschaften der Zeilenstufenform Z von A

- Pivotpositionen sind eindeutig durch Elemente von A bestimmt
- Einträge in Z sind nicht eindeutig bestimmt
- Spalten von A, welche Pivotpositionen enthalten heißen Basisspalten
- $$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(A) &= \#\ \text{Basisspalten von } A \\ &= \#\ \text{von Null verschiedene Zeilen von } Z \\ &= \#\ \text{Pivotelemente} \end{aligned}$$

Beispiel

Aufgabe: Bestimme den Rang und identifiziere die Basisspalten von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Lösung: Zeilenstufenform

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

damit: Rang $A = 2$, Pivotelemente in 1. und 4. Spalte

Basisspalten: 1. und 4. Spalte von A $(A_{:,1}, A_{:,4})$

Spezielle Zeilenstufenform

Erinnerung: Z ist in spezieller Zeilenstufenform Z_A, wenn

- Z in Zeilenstufenform ist
- alle Pivotelemente eins sind
- alle Einträge oberhalb der Pivotelemente Null sind

$$Z_A = \begin{bmatrix} 1 & \times & 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \times & \times & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \times & \times & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Z_A ist eindeutig bestimmt

Beispiel

Aufgabe: Bestimme die spezielle Zeilenstufenform Z_A, den Rang und die Basisspalten von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$Z_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

damit: Rang $A = 3$, Basisspalten: $A_{:,1}, A_{:,3}, A_{:,5}$

Berechnung der Inversen einer Matrix

Erinnerung: Ist $A \in \mathrm{GL}(n)$, also invertierbar, dann ist die spezielle Zeilenstufenform die Identität: $Z_A = I_n$

$$E^l \cdots E^2 E^1 A = I \iff E^l \cdots E^2 E^1 = A^{-1} = E^l \cdots E^2 E^1 I$$

Gauß-Jordan-Verfahren: Transformiere die erweiterte Matrix

$$\left[\ A \mid I\ \right] \longrightarrow \left[\ I \mid A^{-1}\ \right]$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse einer Matrix

Eigenschaften der Inversen: Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nicht singulär, dann gilt

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- AB ist nicht singulär
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,

Gauß-Elimination (Zeilenstufenform für $A \in Gl(n)$)

Nach $k-1$ Schritten Gauß-Elimination erhält man

$$A \longrightarrow A_{k-1} = \begin{bmatrix} \times & \cdots & \times & \alpha_1 & \times & \cdots & \times \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \times & \alpha_{k-1} & \times & \cdots & \times \\ & & & \alpha_k & \times & \cdots & \times \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \alpha_n & \times & \cdots & \times \end{bmatrix}$$

k-ter Schritt

```
if A(k,k) == 0
   Finde Index l, so dass A(l,k) ~= 0
   Tausche Zeilen A(k,:) und A(l,:)
end
Eliminiere Eintraege A(k+1:n,:)
```

Eliminationsschritt I

Erinnerung: Subtraktion des $\ell_{jk} = \alpha_j/\alpha_k$-fachen der k-ten Zeile von der j-ten Zeile entspricht Links-Multiplikation mit

$$I - \ell_{jk} e_j e_k^T$$

Elimination von `A(k+1:n,k)` $\Leftrightarrow$ Links-Multiplikation mit L_k

$$L_k = (I - \ell_{n,k} e_n e_k^T) \cdots (I - \ell_{k+2,k} e_{k+2} e_k^T)(I - \ell_{k+1,k} e_{k+1} e_k^T)$$

Wegen $\langle e_i, e_j \rangle_2 = e_j^T e_i = 0, \quad i \neq j$

$$\begin{aligned} L_k &= I - \ell_{n,k} e_n e_k^T - \ldots - \ell_{k+2,k} e_{k+2} e_k^T - \ell_{k+1,k} e_{k+1} e_k^T \\ &= I - \ell_k e_k^T, \quad \ell_k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \ell_{k+1,k} & \cdots & \ell_{n,k} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Eliminationsschritt II

Nach Konstruktion von L_k gilt dann

$$A_k = L_k \cdot A_{k-1} = \begin{bmatrix} \times & \cdots & \times & \alpha_1 & \times & \cdots & \times \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \times & \alpha_{k-1} & \times & \cdots & \times \\ & & & \alpha_k & \times & \cdots & \times \\ & & & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix}$$

$$= (I - \ell_k e_k^T) A_{k-1} = A_{k-1} - \ell_k e_k^T A_{k-1},$$

Beobachtung

$L_k \cdot$ ändert die ersten $k-1$ Zeilen von A_{k-1} nicht

Algorithmus (ohne Vertauschungen)

Mit $A_0 = A$ und $A_k = L_k A_{k-1}$ erhält man

$$L_n \cdot L_{n-1} \cdots L_2 \cdot L_1 A = R \quad \text{obere Dreiecksmatrix}$$

Wegen $L_k^{-1} = I + \ell_k e_k^T$ ist dann

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} R = LR$$

$$\begin{aligned} \text{Mit} \quad L &= (I + \ell_1 e_1^T)(I + \ell_2 e_2^T) \cdots (I + \ell_{n-1} e_{n-1}^T) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \ell_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel

Die Elemente von L und R können auf den Speicherplätzen von A gespeichert werden.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ 3 & 12 & 16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{2-3} 3 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Wir erhalten also die LR-Zerlegung

$$A = LR \quad \text{mit} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

LR-Zerlegung – *kij* Variante

```
L = eye(n);
for k = 1:n-1
  if A(k,k) == 0
    l = find(A(k+1:n,k),1);
    Tausche A(k,:) und A(l,:)
    else
  end
  for i = k+1:n
    L(i,k) = A(i,k)/A(k,k);
    for j = k:n
      A(i,j) = A(i,j) - L(i,k)*A(k,j);
    end
  end
end
R = A;
```

LR-Zerlegung – *kij* Variante II

```
for k = 1:n-1
  if A(k,k) == 0
    l = find(A(k+1:n,k),1);
    Tausche A(k,:) und A(l,:)
  end
  for i = k+1:n
    A(i,k) = A(i,k)/A(k,k);
    A(i,k+1:n) = A(i,k+1:n) - A(i,k)*A(k,k+1:n);
  end
end
R = triu(A);
L = eye(n) + tril(A,-1);
```

- j-Schleife vektorisiert
- A zum Speichern von L und R verwendet

Aufwand

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(n-k+1) &= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} j(j+1) \\
&= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) \\
&= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)
\end{aligned}$$

Erinnerung: $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

Satz (LR-Zerlegung)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ so, dass bei der Reduktion auf Zeilenstufenform ohne Zeilenvertauschung kein Pivotelement 0 auftritt. Dann gibt es eine Zerlegung $A = LR$ mit

1. L ist untere und R ist obere Dreiecksmatrix
2. $\ell_{i,i} = 1$ und $r_{i,i} \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$
3. L und R sind damit eindeutig bestimmt.

Anwendungen der LR-Zerlegung

Lösung linearer Gleichungssysteme

Sei $A = LR$ die LR-Zerlegung

$$
\begin{aligned}
& Ax = b \\
\iff & L(Rx) = b \\
\iff & Ly = b, \quad Rx = y
\end{aligned}
$$

- L und R haben Dreiecksform
- $Ly = b \longrightarrow$ Vorwärtssubstitution
- $Rx = y \longrightarrow$ Rückwärtssubstitution

Vorwärtssubstitution

$$Ly = b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \ell_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Lösung

```
for i = 1:n
  y(i) = b(i);
  for j = 1:i-1
    y(i) = y(i) - L(i,j)*y(j);
  end
end
```

Aufwand $\sum_{k=2}^{n}(k-1) = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 + O(n)$

Rückwärtssubstitution

$$Rx = y \iff \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ & & & r_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Lösung

```
for i = n:-1:1
  x(i) = y(i);
  for j = i+1:n
    x(i) = x(i) - R(i,j)*x(j);
  end
  x(i) = x(i)/R(i,i);
end
```

Aufwand $$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n^2 + O(n)$$

Bemerkungen zur LR-Zerlegung

- Ist die LR-Zerlegung von A schon berechnet und möchte man ein weiteres Gleichungssystem $Ax = c$ lösen, so kann man die teure LR-Zerlegung ($\sim \frac{1}{3}n^3$ Operationen) wiederverwenden und muss nur die billigen Vorwärts-/Rückwärtseliminationen (je $\sim \frac{1}{2}n^2$ Operationen) neu rechnen.
- Wendet man das Gauß-Verfahren direkt auf die erweiterte Matrix $[A \mid b]$ an, so ergibt sich $[R \mid L^{-1}b]$, die Vorwärtselimination kann also einfach mitgerechnet werden.