Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra

Graphen

Achim Schädle

Übungsleiter: Lennart Jansen

Tutoren: Marina Fischer, Kerstin Ignatzy, Narin Konar
Pascal Kuhn, Nils Sänger, Tran Dinh

29. Januar 2015

Graphen – Mathematische Definition

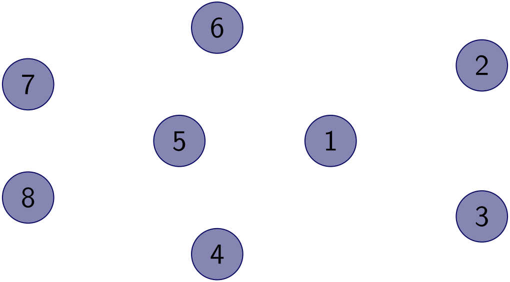
Ein Graph ist definiert durch $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$

- Knoten $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - Personen, Städte, Internetseiten, ...
- Kanten $\mathcal{E} = \{(i, j) \mid i, j \in \mathcal{V}\}$
  - Beziehungen, Verbindungen, Links, Migration, ...

Graphen – Mathematische Definition

Ein Graph ist definiert durch $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$

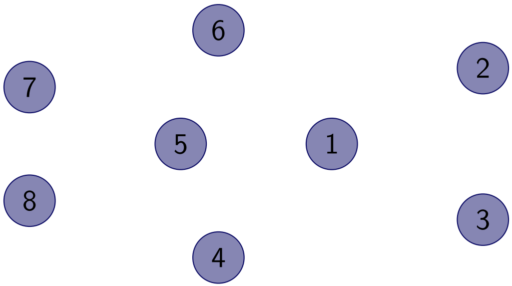
- Knoten $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - Personen, Städte, Internetseiten, ...
- Kanten $\mathcal{E} = \{(i, j) \mid i, j \in \mathcal{V}\}$
  - Beziehungen, Verbindungen, Links, Migration, ...



Graphen – Mathematische Definition

Ein Graph ist definiert durch $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$

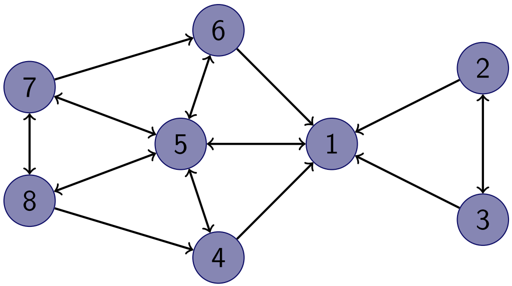
- Knoten $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$
  - Personen, Städte, Internetseiten, ...
- Kanten $\mathcal{E} = \{(i, j) \mid i, j \in \mathcal{V}\}$
  - Beziehungen, Verbindungen, Links, Migration, ...



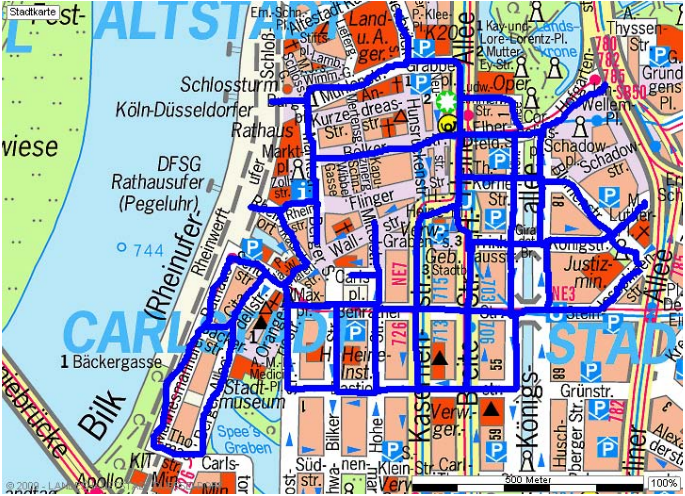
Graphen – Mathematische Definition

Ein Graph ist definiert durch $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$

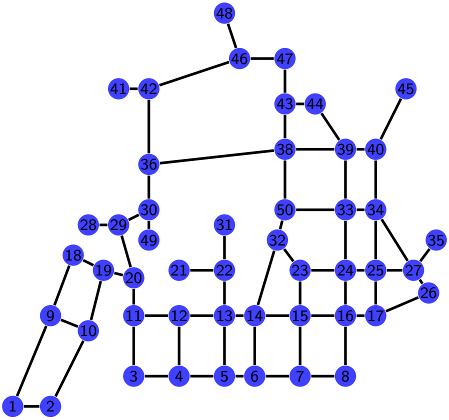
- Knoten $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - Personen, Städte, Internetseiten, ...
- Kanten $\mathcal{E} = \{(i, j) \mid i, j \in \mathcal{V}\}$
  - Beziehungen, Verbindungen, Links, Migration, ...



Beispiel — Straßen

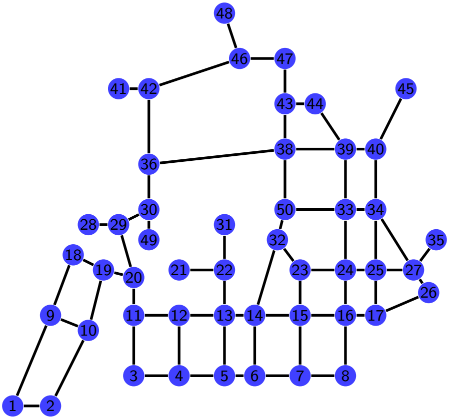


Graphen



- Straßenreinigung
- Paketdienste
- ...
- Planung von Rundfahrten
- Kürzeste Wege
- Erreichbarkeit

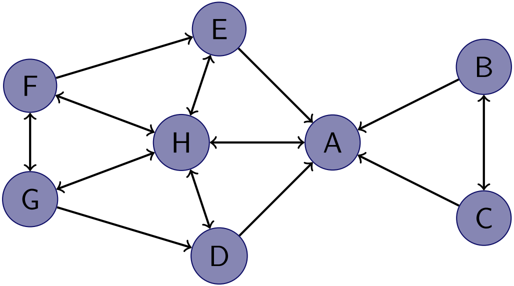
Graphen



- Straßenreinigung
- Paketdienste
- ...
- Planung von Rundfahrten
- Kürzeste Wege
- Erreichbarkeit

Beispiel — Flugpläne

Ein Flugplan einer Fluglinie mit Basis in H und Flügen nach A, B, C, D, E, F, G enthält die Routen



Will man von C nach F fliegen, so ist

$$C \to A \to H \to F$$

eine Möglichkeit mit minimaler Anzahl von Verbindungen.

Fragen

- Wieviele Routen $C \to F$ gibt es mit genau vier Flügen?
- Wieviele Routen $A \to B$ benötigen höchstens fünf Flüge?
- Ist C von G aus erreichbar?
- Was ist die Distanz (in Flügen) zwischen B und D?

...

Isomorphie von Graphen

(Drücken sie die Nummer der Frage, falls sie zustimmen)

1. Falls die Anzahl der Knoten, der Kanten und der Knotengrade übereistimmt so sind zwei Graphen isomorph.
2. i) und j) sind isomorph.
3. a) und b) sind isomorph.
4. h) und f) sind isomorph.

Die Anzahl der Kanten, die in einen Knoten münden, heißt der Grad des Knotens.

Inzidenzmatrizen

Die Inzidenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{V}|}$ eines Graphen $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ist definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nummeriere Flughäfen in Reihenfolge A, B, C, D, E, F, G, H

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 8}$$

Potenzen der Inzidenzmatrix A

Die Potenzen A^ℓ geben Auskunft die Gesamtzahl an Flug- verbindungen zwischen zwei Städten mit genau ℓ Flügen, denn

$$\begin{aligned} a_{ik} &\sim \text{Anzahl der Direktflüge von } i \text{ nach } k \\ a_{kj} &\sim \text{Anzahl der Direktflüge von } k \text{ nach } j \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} a_{ik}a_{kj} \sim\ & \text{Anzahl der 2-Flug-Routen von } i \text{ nach } j \\ & \text{mit Umsteigen in } k \end{aligned}$$

und damit entspricht

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = (A^2)_{ij} \sim\ & \text{Gesamtzahl der 2-Flug-Routen} \\ & \text{von } i \text{ nach } j \end{aligned}$$

Potenzen der Inzidenzmatrix A

Gesamtzahl der 3-Flug-Routen von i nach j

$$\begin{aligned}
(A^3)_{ij} &= \sum_{k_1=1}^{n} a_{i,k_1}(A^2)_{k_1,j} \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{i,k_1} \sum_{k_2=1}^{n} a_{k_1,k_2} a_{k_2,j} \\
&= \sum_{k_1,k_2=1}^{n} a_{i,k_1} a_{k_1,k_2} a_{k_2,j}
\end{aligned}$$

Allgemein: Gesamtzahl der ℓ-Flug-Routen von i nach j.

$$(A^\ell)_{ij} = \sum_{k_1,\dots,k_{m-1}=1}^{n} a_{i,k_1} a_{k_1,k_2} \cdots a_{k_{m-2},k_{m-1}} a_{k_{m-1},j}$$

Gesamtzahl der Routen

Gesamtzahl der Routen mit maximal ℓ Flügen von i nach j

$$A_{ij} + (A^2)_{ij} + \ldots + (A^\ell)_{ij} = (A + A^2 + \ldots + A^\ell)_{ij}$$

In unserem Beispiel:

$$(A^3)_{36} = 1 \Longrightarrow \text{Eine 3-Flug-Route von } C \text{ nach } F$$

$$(A^4)_{36} = 3 \Longrightarrow \text{Zwei 4-Flug-Routen von } C \text{ nach } F$$

$$(\sum_{\ell=1}^{5} A^\ell)_{25} = 15 \Longrightarrow \text{Elf Routen von } B \text{ nach } E$$

mit höchstens 5 Flügen

Kürzeste Route und Erreichbarkeit

Kürzeste Route zwischen i und j:

$$\text{Minimales } \ell \text{ so dass } (A^{\ell-1})_{ij} = 0 \text{ und } (A^{\ell})_{ij} \neq 0$$

Da $(A^2)_{34} = 0$ und $(A^3)_{34} \neq 0$, besteht die die kürzeste Route von C nach D aus 3 Flügen.

Längste Entfernung im Graph ($\leq n-1$ oder ∞)

$$\max_{i,j \in \mathcal{V}} \min_{\ell} (A^{\ell-1})_{ij} = (A^{\ell})_{ij}$$

Erreichbarkeit: j ist nicht von i erreichbar, falls

$$(A^{\ell})_{ij} = 0, \ell = 1, \dots, n-1$$

Da $(A^{\ell})_{12} = 0, \ell = 1, \dots, 7$ ist B nicht von A aus erreichbar

Kürzeste Route und Erreichbarkeit

Kürzeste Route zwischen i und j:

$$\text{Minimales } \ell \text{ so dass } (A^{\ell-1})_{ij} = 0 \text{ und } (A^{\ell})_{ij} \neq 0$$

Da $(A^2)_{34} = 0$ und $(A^3)_{34} \neq 0$, besteht die die kürzeste Route von C nach D aus 3 Flügen.

Längste Entfernung im Graph ($\leq n-1$ oder ∞)

$$\max_{i,j \in \mathcal{V}} \min_{\ell} (A^{\ell-1})_{ij} = (A^{\ell})_{ij}$$

Erreichbarkeit: j ist nicht von i erreichbar, falls

$$(A^{\ell})_{ij} = 0, \ell = 1, \dots, n-1$$

Da $(A^{\ell})_{12} = 0, \ell = 1, \dots, 7$ ist B nicht von A aus erreichbar

Kürzeste Route und Erreichbarkeit

Kürzeste Route zwischen i und j:

$$\text{Minimales } \ell \text{ so dass } (A^{\ell-1})_{ij} = 0 \text{ und } (A^{\ell})_{ij} \neq 0$$

Da $(A^2)_{34} = 0$ und $(A^3)_{34} \neq 0$, besteht die die kürzeste Route von C nach D aus 3 Flügen.

Längste Entfernung im Graph ($\leq n-1$ oder ∞)

$$\max_{i,j\in\mathcal{V}} \min_{\ell} (A^{\ell-1})_{ij} = (A^{\ell})_{ij}$$

Erreichbarkeit: j ist nicht von i erreichbar, falls

$$(A^{\ell})_{ij} = 0, \ell = 1, \dots, n-1$$

Da $(A^{\ell})_{12} = 0, \ell = 1, \dots, 7$ ist B nicht von A aus erreichbar

Gewichtete Graphen

Motivation — Epidemiologie

Um den Einfluss einer Krankheit auf eine Population zu beschreiben, kann man stark vereinfacht annehmen, dass über einen gegebenen Zeitraum betrachtet, sich ein bestimmter Anteil der gesunden Population mit der Krankheit infiziert. Ein Teil der kranken Population stirbt, ein weiterer Anteil überlebt die Krankheit und kann unter Umständen eine Immunität gegen die Krankheit entwickeln.

Fragestellung

Wie entwickelt sich die Population, wenn Infektionsrate α, Mortalitätsrate β, Immunisierungsrate γ bekannt sind?

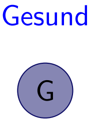
Motivation — Epidemiologie

Um den Einfluss einer Krankheit auf eine Population zu beschreiben, kann man stark vereinfacht annehmen, dass über einen gegebenen Zeitraum betrachtet, sich ein bestimmter Anteil der gesunden Population mit der Krankheit infiziert. Ein Teil der kranken Population stirbt, ein weiterer Anteil überlebt die Krankheit und kann unter Umständen eine Immunität gegen die Krankheit entwickeln.

Fragestellung

Wie entwickelt sich die Population, wenn Infektionsrate α, Mortalitätsrate β, Immunisierungsrate γ bekannt sind?

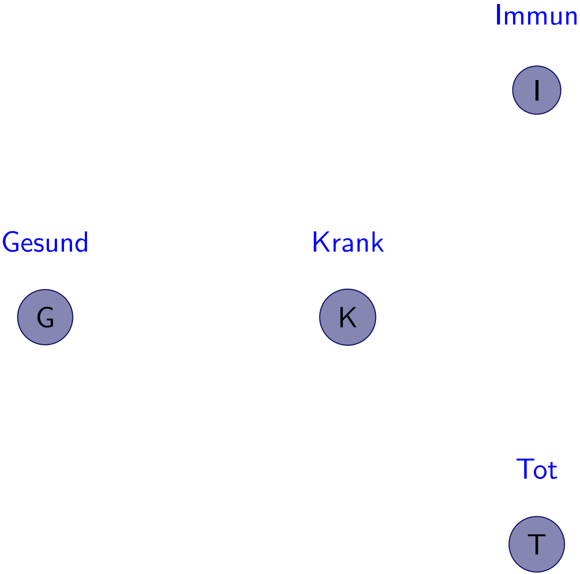
Mathematisches Modell



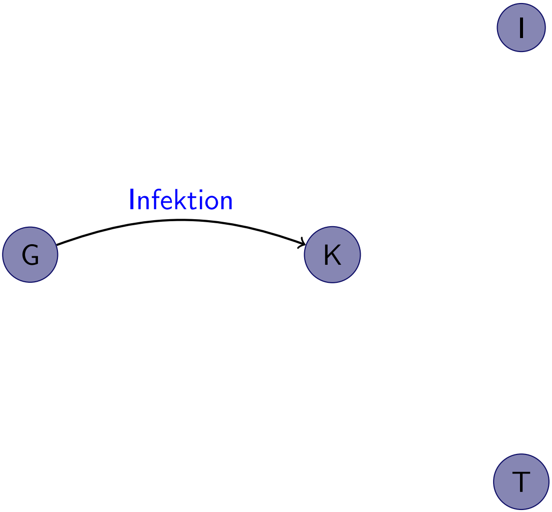
Mathematisches Modell

Mathematisches Modell

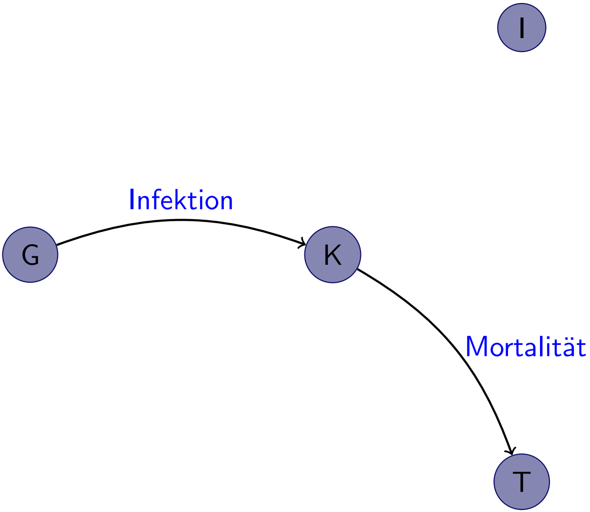
Mathematisches Modell



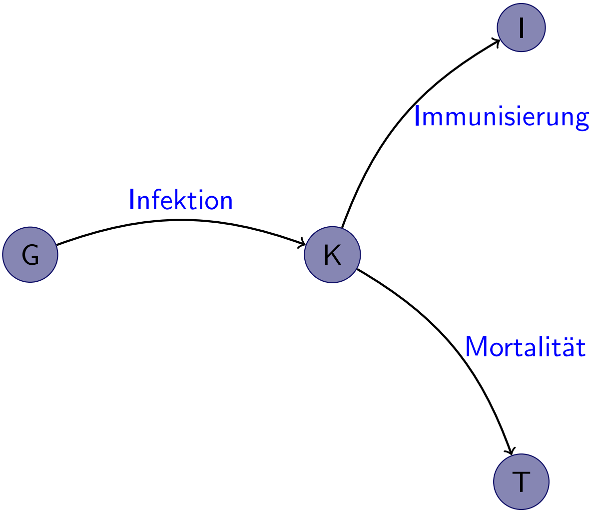
Mathematisches Modell



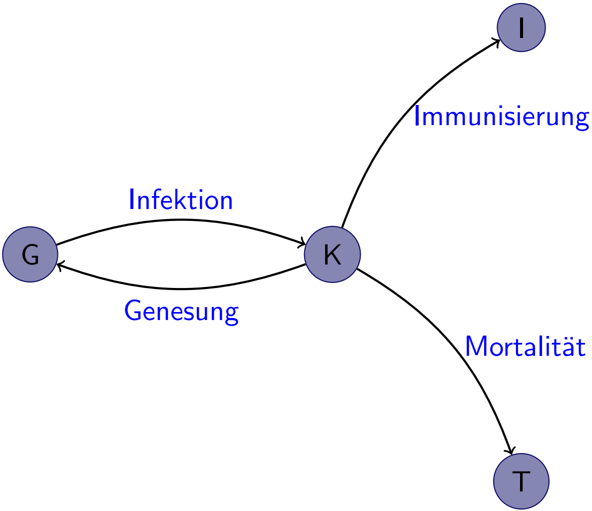
Mathematisches Modell



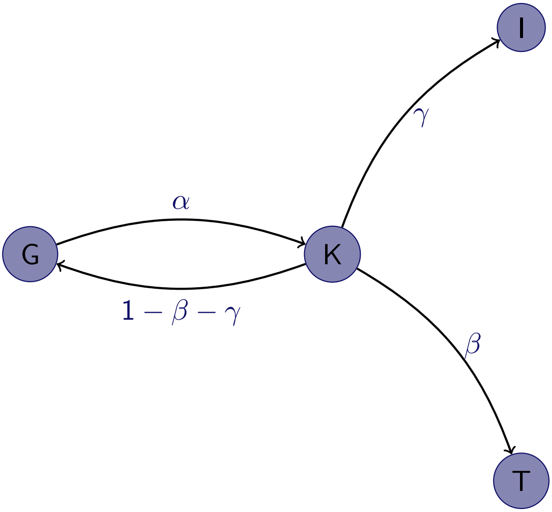
Mathematisches Modell



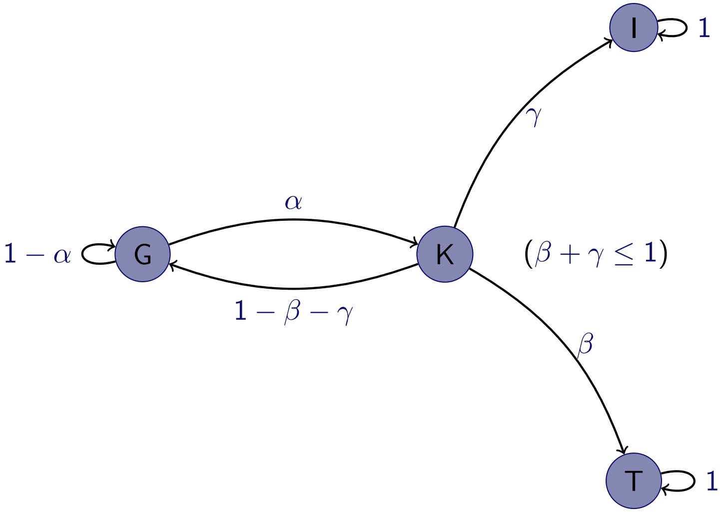
Mathematisches Modell



Mathematisches Modell



Mathematisches Modell



Mathematisches Modell

Darstellung als Kanten-gewichteter Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$

- Zustandsmenge $\mathcal{V}$
- Zustandsübergänge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
- Übergangsgewichte $\omega : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

Analog zur Inzidenzmatrix definiert man eine gewichtete Inzidenzmatrix $A_\omega \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V} \times \mathcal{V}|}$ durch

$$(A_\omega)_{v,w} = \begin{cases} \omega(v,w) & \text{falls } (v,w) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mathematisches Modell

Darstellung als Kanten-gewichteter Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$

- Zustandsmenge $\mathcal{V}$
- Zustandsübergänge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
- Übergangsgewichte $\omega : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

Analog zur Inzidenzmatrix definiert man eine gewichtete Inzidenzmatrix $A_\omega \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V} \times \mathcal{V}|}$ durch

$$(A_\omega)_{v,w} = \begin{cases} \omega(v, w) & \text{falls } (v, w) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Populationsentwicklung im Modellproblem

Mit $\mathcal{V} = \{G, K, I, T\}$ erhalten wir die Inzidenzmatrix

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1-\beta-\gamma & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Entwicklung einer Population mit Startverteilung $x^{(0)}$ erhält man nun durch die Vorschrift

$$x^{(k+1)} = A_\omega \cdot x^{(k)}$$

Die Zustände I und T sind final, also ergibt sich

$$x_G^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{und} \quad x_K^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Populationsentwicklung im Modellproblem

Mit $\mathcal{V} = \{G, K, I, T\}$ erhalten wir die Inzidenzmatrix

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1-\beta-\gamma & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Entwicklung einer Population mit Startverteilung $x^{(0)}$ erhält man nun durch die Vorschrift

$$x^{(k+1)} = A_\omega \cdot x^{(k)}$$

Die Zustände I und T sind final, also ergibt sich

$$x_G^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{und} \quad x_K^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Populationsentwicklung im Modellproblem

Mit $\mathcal{V} = \{G, K, I, T\}$ erhalten wir die Inzidenzmatrix

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1-\beta-\gamma & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Entwicklung einer Population mit Startverteilung $x^{(0)}$ erhält man nun durch die Vorschrift

$$x^{(k+1)} = A_\omega \cdot x^{(k)}$$

Die Zustände I und T sind final, also ergibt sich

$$x_G^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{und} \quad x_K^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Gilt wie in unserem Beispiel, dass $\omega(v, w) \geq 0$ und

$$\sum_{w \in \mathcal{V}} \omega(v, w) = 1 \quad \text{für alle} \quad v \in \mathcal{V},$$

so beschreibt $\mathcal{G}$ eine diskrete Markov Kette. Diese sind die mathematische Beschreibung einfacher stochastischer Prozesse, die durch Zustände und Übergänge beschrieben werden.

Besonderes Interesse in der Untersuchung von Markov Ketten gilt den sogenannten stationären Verteilungen, das heißt Vektoren x für die gilt

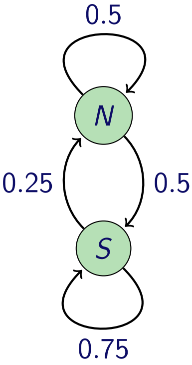
$$A_\omega x = x.$$

Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und stabile Zustände des Systems.

Beispiel: Bevölkerungsmigration

Migrationsverhalten innerhalb eines Jahres:

- 50 % der Bevölkerung ziehen von Nord nach Süd
- 25 % der Bevölkerung ziehen von Süd nach Nord

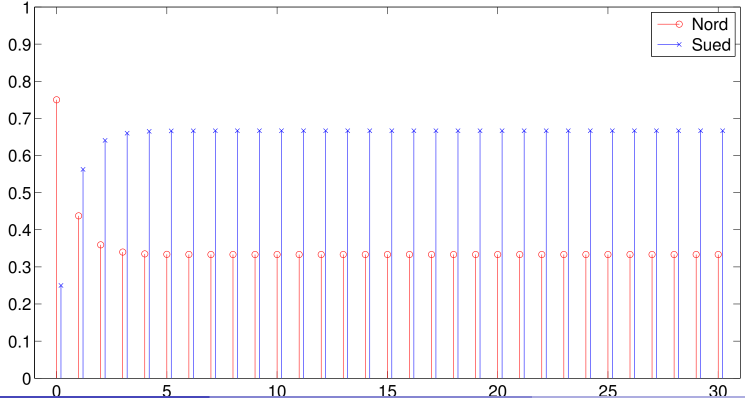


Berechnung der Entwicklung, I

Mit $\mathcal{V} = \{N, S\}$ ist die Inzidenzmatrix gegeben durch

$$A_\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Bevölkerungsentwicklung

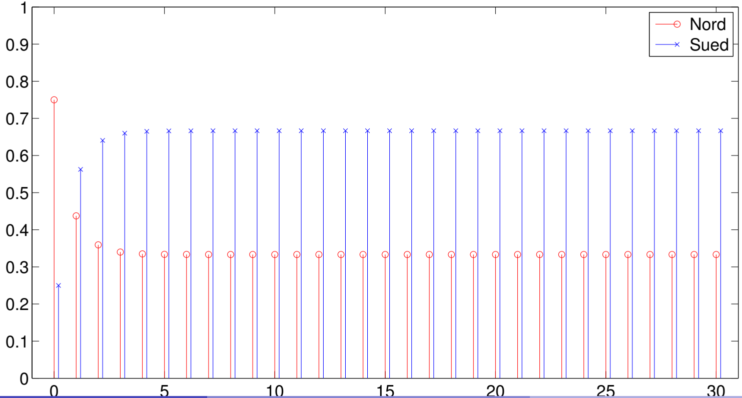


Berechnung der Entwicklung, I

Mit $\mathcal{V} = \{N, S\}$ ist die Inzidenzmatrix gegeben durch

$$A_\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Bevölkerungsentwicklung



Berechnung der Entwicklung, II

Besitzt die Markov-Kette eine stationäre Verteilung unabhängig von der Startverteilung?

Betrachte die Eigenzerlegung von A_ω, es ist

$$A_\omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_\omega \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Demnach ist $T^k \to \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad k \to \infty$ und damit

$$x^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \underbrace{\left(x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right)}_{=1}$$

unabhängig von der Anfangsverteilung $x^{(0)}$ mit $x_1^{(0)} + x_2^{(0)} = 1$

Mathematischer Hintergrund

Satz von Perron-Frobenius

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ irreduzibel und $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Dann ist der betragsgrößte Eigenwert λ_* von A reell, einfach und der zugehörige Eigenvektor x ist positiv.

Konsequenz

Ist der Graph einer endlichen diskreten Markov Kette stark zusammenhängend, so ist der betragsgröße Eigenwert 1 und einfach. Also ist der zugehörige Eigenvektor x mit $Ax = x$ eindeutig und es gilt

$$A^\ell y \xrightarrow{\ell \to \infty} x \quad \text{für} \quad y_i \geq 0, \quad \sum_i y_i = 1.$$