Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Achim Winkelhaus

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

24.2.2014 / 1

Klausur

Name: ....

Vorname: ....

Account zur Klausur: ....

Geburtsdatum und -ort: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang und Fachsemester: ....

Hiermit melde ich mich zu dieser Klausur an und bestätige, dass ich mich nicht im Urlaubssemester befinde.

Mit der Veröffentlichung der Ergebnisse im Internet bin ich einverstanden: **ja / nein**

Unterschrift: ....

Hinweise: WICHTIG !

- In Ihrem Home-Verzeichnis finden Sie die Dateien `WerBinIch.txt`, sowie `a1.mw`, `a2.mw`, `a3.mw`, `a4.mw`, und `a5.mw`
- Ergänzen Sie zuerst die Datei `WerBinIch.txt` mit Ihrem Namen, Vorname, usw.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, die in Dateien mit dem jeweils in der Aufgabe angegebenen Namen in Ihrem Home-Verzeichnis gespeichert sind. Speichern Sie daher in kurzen Abständen Ihre Lösungen, um ggf. den Verlust von Daten zu vermeiden, falls Maple einmal abstürzt.
- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, bei denen der Lösungsweg (mit Maple) klar zu erkennen ist.
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten.
- Zum Bestehen dieser Klausur sind **15** Punkte hinreichend.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
max. Punkte	6	6	6	6	6	30	
err. Punkte							

Hinweis: Sie benötigen eventuell die Pakete **plots** und **VectorCalculus**

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die **erste** und **zweite** Ableitung folgender Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

(a) $n = 1$, $m = 1$,

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\mathrm{e}^{-x^2+1}$$

(b) $n = 3$, $m = 1$,

$$(x, y, z) \mapsto \sin^2(x+y) + \cos^2(y+z)$$

und vereinfachen in b) Sie die Hessematrix.

Aufgabe 2:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \mathrm{e}^{-x^4+x^2}.$$

(a) Zeichnen sie die Graphen von f, $\frac{1}{2}f'$ und $\frac{1}{4}f''$ über dem Intervall $[-2, 2]$ in festgelegten Farben.

(b) Bestimmen sie alle relativen Extremalstellen von f und stellen sie fest, welche von ihnen Maximal- bzw. Minimalstellen sind.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -0.1$ und plotten sie den Graphen von f und die Tangente in eine Graphik. Bestimmen sie alle Schnittpunkte der Tangente mit dem Graphen.

Aufgabe 3:

(a) Zeichnen Sie in der (komplexen) Ebene die Menge

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z+a}{z-a}\,\frac{z+b}{z-b} \right| = 1 \right\}$$

für $a = -6 - 4i$, $b = 2 + 2i$. Wählen sie dafür einen geeigneten Bereich.

(b) Verwenden Sie den Befehl `pointplot` aus dem plots-Paket, um zusätzlich die beiden Punkte a und b einzuzeichnen.

Aufgabe 4:

Sei

$$f(x) := \exp(-x^2/4)x$$

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Rekursion

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x+1, \quad (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

die Polynome L_j für $j = 0, \ldots, 12$.

(b) Berechnen Sie für $k = 0, \ldots, 12$ die Koeffizienten c_k

$$c_k = \int_0^\infty f(x)L_k(x)\exp(-x)\,\mathrm{d}x \text{ für } k \geq 0.$$

(c) Berechnen Sie anschliessend für $n = 4$, $n = 9$ und $n = 12$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x)$$

(d) Zeichnen Sie f, f_4, f_9 und f_{12} über dem Intervall $[0, 10]$ in einer Graphik. Verwenden Sie unterschiedliche Farben.

(e) Berechnen Sie für die obigen f_n ($n \in \{4, 9, 12\}$) jeweils $|f(a) - f_n(a)|$ numerisch für $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie die erhaltenen Werte in übersichtlicher Form aus.

Aufgabe 5:

Betrachten sie die Differentialgleichung

$$(1 + y(x))\frac{d}{dx}y(x) = \sin(x)\sqrt{y(x)}$$

(a) Lösen sie diese Differentialgleichung einmal mit dem Anfangswert $y(0) = 1$ und zum anderen mit dem Anfangswert $y(0) = 1/2$.

(b) Zeichnen sie beide Lösungen für $x \in [0, 10]$ in eine Graphik mit dem zugehörigen Vektorfeld.