Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Achim Schädle

WS 2012/13
7.02.2013

KLAUSUR zu „Einführung in die Optimierung“

Bitte folgende Angaben ergänzen und DEUTLICH LESBAR in Druckbuchstaben schreiben:

Name: Vorname:

Matrikel-Nr.: Fachsemester:

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Diplom (bitte ankreuzen)

Studienfach:
(z.B. Mathematik)

Für Bachelor-Mathematik Studenten nach der Prüfungsordnung von 2008:

Hiermit melde ich mich zur Klausur „Einführung in die Optimierung“ an und bestätige, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

………………………………………..
Unterschrift

Für Studenten, die die Zulassung bereits in vergangenen Semestern erlangt haben:

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser Klausur zugelassen bin, da ich die Klausur bei Prof. ______________________ in Sommer-/Wintersemester _____________ mitgeschrieben, aber nicht bestanden habe.

………………………………………..
Unterschrift

1	2	3	4	5	6	7	Summe

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Thomas Davi
Georg Jansing

7.2.2013

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Einführung in die Optimierung – Klausur

Hinweis: Sie müssen bei allen folgenden Aufgaben auch Ihre Rechenwege aufschreiben, nur Ergebnisse anzugeben reicht nicht aus.

Aufgabe 1: (2 + 2 + 5 Punkte)

Da bald der Frühling kommt brauchen Sie einen Plan für die Gestaltung ihres Schrebergartens. Es sollen Bäume gepflanzt und Grasflächen angelegt werden.

Ein Baum benötigt eine Fläche von 2 Quadratmetern. Die zur Verfügung stehende Gartenfläche beträgt 10 Quadratmeter. Maximal dürfen 4 Bäume gepflanzt werden. Dann gibt es noch ein altes Gesetz: Die Grasfläche in Quadratmetern abzüglich der Anzahl der Bäume muss kleiner gleich 5 sein.

Sie wollen die Freude an Ihrem Garten maximieren und nach langer Überlegung sind Sie zu dem Schluss gekommen, dass ein Quadratmeter Rasen einen Spassfaktor von 2 und ein Baum den Spassfaktor 1 hat.

(a) Formulieren Sie für dieses Problem ein gemischt ganzzahliges lineares Programm. Was sind die Variablen?

(b) Zeichnen Sie den Zulässigkeitsbereich, beschriften Sie die Achsen und bestimmen Sie graphisch eine optimale Lösung.

(c) Bringen sie die LP-Relaxierung des Programms aus (a) auf Standardform und lösen Sie es mit Hilfe des Simplexverfahrens.

Hinweis: Falls Sie Ihrer Formulierung des linearen Programms aus Teil (a) nicht trauen, können Sie in Teil (c) alternativ mit folgendem modifizierten linearen Programm

$$
(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.d.} & x_1 & & & \leq & 8 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

weiterrechnen. **(P) ist kein Zwischenergebnis!**

Lösung:

(a) Die Variable x_1 bezeichne die Quadratmeter an Grasfläche und die Variable x_2 die Anzahl der Bäume. Das gemischt ganzzahlige Programm ist dann von der Form

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.d.} & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

(b) siehe Abbildung 1.

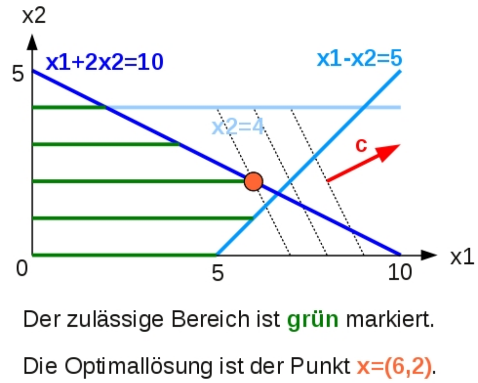

Abbildung 1: Grafische Lösung des MI-Programmes

(c) Die LP-Relaxation (in Standardform) des Programmes aus Teilaufgabe (a) hat die Form

$$
(LP) \qquad
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\min & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.d.} & & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 10 \\
 & x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 5 \\
 & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Die Basis $B = (3, 4, 5)$ ist offenbar zulässig. Das zugehörige Tableau ist:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
	-2	-1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	4
4	1	2	0	1	0	10
5	$\boxed{1}$	-1	0	0	1	5

Mit $N(s) = 1$ und $r = 3 \Leftrightarrow B(r) = 5$ erhalten wir

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
	0	-3	0	0	2	10
3	0	1	1	0	0	4
4	0	$\boxed{3}$	0	1	-1	5
1	1	-1	0	0	1	5

Wir wählen nun $N(s) = 2$ und $r = 2 \Leftrightarrow B(r) = 4$ und erhalten

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
	0	0	0	1	1	15
3	0	0	1	-1/3	1/3	7/3
2	0	1	0	1/3	-1/3	5/3
1	1	0	0	1/3	2/3	20/3

Die reduzierten Kosten sind für den Punkt $\bar{x} = (20/3, 5/3, 7/3, 0, 0)^T$ nicht-negativ. Somit ist $\bar{x}$ Optimallösung des Problems (LP).

Aufgabe 2: (4 + 2 + 2 Punkte)

(a) Leiten Sie für das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{s.d.} & 2x_1 & & & - & x_3 & \geq & 8 \\ & -4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 5 \\ & & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 7 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 4 \\ & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{(P)}$$

dasjenige lineare Programm her, das eine möglichst gute untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert von (P) liefert. (Oder kürzer formuliert: Konstruieren Sie das duale lineare Programm zu (P)). **Es reicht nicht das duale lineare Programm einfach anzugeben!**

(b) Zeigen Sie, dass der Punkt $y = (7, 3, 1, 0)$ zulässig für das duale lineare Programm ist.

(c) Alice behauptet die Optimallösung von (P) sei $x = (11, 7, 14)$. Stimmt diese Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort ohne eine optimale Lösung mit Hilfe des Simplextableaus zu berechnen.

Lösung:

(a) Man möchte eine möglichst gute untere Schranke für den Wert $P_{inf} = \inf\{c^T x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ bestimmen (wobei A, b und c entsprechend den Daten von (P) gewählt seien.) Sei $x \geq 0$ mit $Ax \geq b$ geben. Dann gilt für alle $y \geq 0$ mit $A^T y \leq c$

$$c^T x \geq y^T A x \geq y^T b$$

und somit

$$\inf\{c^T x \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \geq \sup\{b^T y \mid A^T y \leq c, y \geq 0\},$$

sofern mindestens ein $y \geq 0$ mit $A^T y \leq c$ existiert. Damit wird durch

$$\begin{array}{rl} \max & b^T y \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

eine untere Schranke für P_{inf} bestimmt. Das duale Programm hat hier die Form

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 8y_1 & + & 5y_2 & + & 7y_3 & + & 4y_4 & & \\ \text{s.d.} & 2y_1 & - & 4y_2 & & & + & 2y_4 & \leq & 2 \\ & & & y_2 & - & y_3 & + & y_4 & \leq & 2 \\ & -y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & \leq & 3 \\ & & & y_1, & & y_2, & y_3 & y_4 & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{(D)}$$

Nach dem starken Dualitätssatz ist die durch (D) gegebene Schranke optimal, falls (P) und (D) zulässige Punkte besitzen.

(b) Wir betrachten den Punkt $y = (7, 3, 1, 0)$: Es gilt

$$\begin{array}{rrrrl} 2 \cdot 7 & -4 \cdot 3 & & +2 \cdot 0 & = 2, \\ & 3 & -1 & +0 & = 2, \\ -7 & +3 \cdot 3 & +1 & +0 & = 3 \end{array}$$

und $y \geq 0$. Damit ist y für (D) zulässig.

(c) Betrachte $x = (11, 7, 14)$. Es gilt

$$\begin{array}{rrrl} 2 \cdot 11 & & -14 & = 8, \\ -4 \cdot 11 & +7 & +3 \cdot 14 & = 5, \\ & -7 & +14 & = 7, \\ 2 \cdot 11 & +2 \cdot 7 & +3 \cdot 14 & = 47 \geq 4 \end{array}$$

und $x \geq 0$. Daher ist x für (P) zulässig. Weiterhin gilt $c^T x = 2 \cdot 11 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 14 = 78$. Für den Vektor y aus Teilaufgabe (b) gilt $b^T y = 8 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 78 = c^T x$. Aus der schwachen Dualität folgt, dass es keinen für (P) zulässigen Punkt $\bar{x}$ mit $c^T \bar{x} < 78$ geben kann und somit ist $x = (11, 7, 14)$ Optimallösung von (P).

Aufgabe 3: (1+1+2 Punkte)

Sei für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto ||Ax||_2^2 + ||x||_2^2$ gegeben.

(a) Geben Sie den Gradienten von $f(x)$ an.

(b) Geben Sie die Hessematrix von $f(x)$ an.

(c) Beschreiben Sie die Lösungsmenge von $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x)\}$

Lösung:

(a) Es gilt $f(x) = x^T A^T Ax + x^T x = x^T (A^T A + I)x$.

Damit folgt $\nabla f(x) = 2(A^T A + I)x$.

(b) $\nabla^2 f(x) = 2(A^T A + I) \succ 0$.

(c) Die einzige Nullstelle des Gradienten ist $\bar{x} = \frac{1}{2}(A^T A + I)^{-1} 0_V = 0_V$. Da $\nabla^2 f \succ 0$ ist f (streng) konvex und $\bar{x}$ damit globales Minimum von f.

Alternativ überlegt man sich, dass die Norm eines Vektors immer nicht-negativ ist und somit $f(x) \geq 0$ aber auch $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$ gilt, und daher 0_V das einzige globale Minimum von f ist.

Aufgabe 4: (2 + 3 Punkte)

Zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms kann man das Newtonverfahren verwenden.

(a) Formulieren Sie hierfür die Iterationsvorschrift.

(b) Berechnen Sie für das Polynom

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2$$

die ersten beiden Iterierten x^1 und x^2 ausgehend vom Startwert $x^0 = 0$.

Lösung:

(a) Sei p ein Polynom. Dann lautet die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{p(x^{(k)})}{p'(x^{(k)})}.$$

(b) Es gilt $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2$ und somit

$$p'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2.$$

Es folgt daher für $x^{(0)} = 0$: $p(x^{(0)}) = -2$, $p'(x^{(0)}) = 2$ und

$$x^{(1)} = 0 - \frac{-2}{2} = 1.$$

Mit $p(x^{(1)}) = -2$ und $p'(x^{(1)}) = -3$ erhält man

$$x^{(2)} = 1 - \frac{-2}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Sei $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2)^2$. Ausgehend von Punkt $x^T = (1, 0)$ betrachten wir die Suchrichtung $s^T = (-1, 1)$. Zeigen Sie, dass s eine Abstiegsrichtung ist und finden Sie alle Minima von

$$\min_{\alpha>0} f(x + \alpha s)$$

Lösung:

Es gilt $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2^2 + x_2^4$ und

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2^2 \\ 4x_1x_2 + 4x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Für $x = (1, 0)^T$ und $s = (-1, 1)^T$ gilt somit:

$$\nabla f(x)^T s = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

Damit ist s eine Abstiegsrichtung für f an der Stelle x.

Gesucht ist nun die Lösung des Problems

$$\min_{\alpha>0} f((1, 0)^T + \alpha(-1, 1)^T) = \min_{\alpha>0}((1 - \alpha) + \alpha^2)^2.$$

Zunächst folgt für $\varphi(\alpha) := \alpha^2 - \alpha + 1$:

$$\varphi'(\alpha) = 2\alpha - 1 \text{ und } \varphi''(\alpha) = 2 > 0.$$

Damit ist φ konvex und die einzige kritische Stelle – und somit das globale Minimum – ist $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}$. Wegen $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ folgt $\varphi > 0$. Da $z \mapsto z^2$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng monoton wachsend ist, ist $\bar{\alpha}$ auch das globale Minimum der Funktion $\alpha \mapsto \varphi(\alpha)^2$ und daher die gesuchte Lösung.

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Kreuzen Sie das entsprechende Feld an.

wahr	**falsch**	**Aussage**
	x	Konvexe Mengen sind beschränkt und abgeschlossen.
	x	Ist x^* eine optimale zulässige Basislösung eines linearen Programms so ist x^* eindeutig.
	x	Ist x^* eine optimale Lösung eines linearen Programms so ist x^* ein Extremalpunkt des zulässigen Polyeders.
x		Innere-Punkte-Verfahren zur Lösung linearer Programme berechnenen in jedem Schritt einen zulässigen Punkt.
	x	Innere-Punkte-Verfahren zur Lösung linearer Programme berechnenen in jedem Schritt eine Basislösung mit einem verbesserten Zielfunktionswert.
x		Die erste Wolfebedingung zur Schrittweitenwahl garantiert eine Verbesserung des Zielfunktionswerts.
x		Hat eine symmetrische positiv definite Matrix A nur sieben verschiedene Eigenwerte so liefert das cg-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ nach spätestens sieben Schritten eine Lösung.
x		Bei einem Quasinewton Verfahren berechnet man in jedem Schritt eine Approximation an die Hessematrix bzw. an die inverse Hessematrix.
x		Durch einen Gomory Schnitt erhöht sich die Anzahl der Nebenbedingungen.