Ein Beispiel zu Vereinfachungen

Vorlesung

Computergestützte Mathematik zur Analysis

Achim Schädle   Achim Winkelhaus

Marcel Brauer   Claudia Kleppen   Duygu Özmen

Padéapproximation

Die Padéapproximation $R_{m,n}(x)$ der Ordnung (m,n) an eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

im Punkt z_0 ist diejenige rationale Funktion deren Ableitungen mit den Ableitungen von f in z_0 bis zum Grad $m+n$ übereinstimmen.

Henri Padé (1863-1953)

Kettenbruchdarstellung der Quadratwurzel

Für die Padéapproximation der Wurzel um $z_0 = 1$ gilt

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \cfrac{\frac{1}{2}z}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}z}{2 + \cfrac{\frac{1}{2}z}{1 + \ldots}}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}z}{\frac{3-(-1)^n}{2} +}$$

Kettenbrüche – Rekursive Berechnung

Lemma: Abschnitt 4 Baker 1981
Für den L-ten abgeschnittenen Kettenbruch gilt

$$a_0 + \sum_{n=1}^{L} \frac{b_n}{a_n +} = \frac{A_L}{B_L},$$

wobei A_n und B_n durch folgende Rekursion gegeben sind.

$$A_{-1} = 1,\ A_0 = a_0, \quad A_{n+1} = a_{n+1}A_n + b_{n+1}A_{n-1},$$
$$B_{-1} = 0,\ B_0 = 1, \quad B_{n+1} = a_{n+1}B_n + b_{n+1}B_{n-1}.$$

Beweis: vollständige Induktion

Kettenbruchdarstellung

Die Polbedingung liefert

$$(z+1)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{C_L}{D_L}$$

für C_k und D_k rekursiv definiert durch

$$C_{-1} = 1,\ C_0 = \frac{z+2}{2}, \quad C_{k+1} = (2+z)\frac{2}{z}C_k - C_{k-1}$$
$$D_{-1} = 0,\ D_0 = 1, \qquad D_{k+1} = (2+z)\frac{2}{z}D_k - D_{k-1}$$

Frage

Haben die beiden Approximationen etwas miteinader zu tun?
Wenn ja: Was haben die beiden Approximationen miteinader zu tun?