Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
YANICK KIECHLE

04.06.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 29:

Für $K \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$\mathbb{Q}_1(K) := \{v \in C(K) \mid v : (x, y) \mapsto a + bx + cy + dxy,\ \text{wobei } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Sei $T = [0,1]^2$ das Einheitsquadrat und $\Sigma = \{\text{Punktauswertungen in den Ecken}\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T,\ \mathbb{Q}_1(T),\ \Sigma)$ ein finites Element ist und bestimmen Sie die nodale Basis. (Dieses Element heißt "bilinear", weil die Formfunktionen linear auf jeder Kante sind.)

(b) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{\text{Punktauswertungen in den Kantenmittelpunkten}\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T,\ \mathbb{Q}_1(T),\ \widetilde{\Sigma})$ kein finites Element ist.

Aufgabe 30:

Sei K ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $\{\boldsymbol{z}_i\}_{i=1,2,3}$ und dem Schwerpunkt $\boldsymbol{z}_4$. Für eine hinreichend glatte Funktion f und einen Punkt $\boldsymbol{z}$ sei $N_{\boldsymbol{z}} f := f(\boldsymbol{z})$ die Punktauswertung von f in $\boldsymbol{z}$. Weiter seien $N^x_{\boldsymbol{z}} f := \frac{\partial}{\partial x} f(\boldsymbol{z})$ bzw. $N^y_{\boldsymbol{z}} f := \frac{\partial}{\partial y} f(\boldsymbol{z})$ die Punktauswertungen der partiellen Ableitung von f in x- bzw. y-Richtung in $\boldsymbol{z}$ (siehe Beispiel (1.8)).

Zeigen Sie, dass $(K, \mathbb{P}_3(K), \Sigma)$ ein finites Element ist, falls

$$\Sigma = \{N_{\boldsymbol{z}_i}\}_{i=1,2,3,4} \ \cup\ \{N^x_{\boldsymbol{z}_i}\}_{i=1,2,3} \ \cup\ \{N^y_{\boldsymbol{z}_i}\}_{i=1,2,3}.$$

Aufgabe 31:

Überlegen Sie sich, dass die Quadraturformel

(a)
$$\sum_{i=1}^{3} b_i f(c_i) \quad \text{mit} \quad b_i = 1/6 \ \text{ für } \ i = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad c_1 = (1/2, 0),\ c_2 = (0, 1/2),\ c_3 = (1/2, 1/2)$$

exakt für Polynome in $\mathbb{P}_2$ auf dem Referenzdreieck ist und

(b)
$$\sum_{i=1}^{4} b_i f(c_i) \quad \text{mit} \quad b_i = 1/4 \quad \text{und} \quad c_i = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad \text{für} \ \ i = 1, \dots, 4$$

exakt für Polynome in $\mathbb{Q}_3$ auf dem Referenzquadrat ist.

Aufgabe 32:

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Operator

$$L \ :\ H^1(\hat{K}) \ \longrightarrow\ L^2(\hat{K}), \quad v \ \longmapsto\ \int_0^1 v(t, 0)\, \mathrm{d}t$$

ein linearer, stetiger Operator ist.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 12.06.2025.