Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
YANICK KIECHLE

28.05.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 26:

(a) Lesen und verstehen Sie das Beispiel "1.3 Dirichlet boundary conditions" auf der NGS-Py-Homepage (ohne den letzten Teil "The automatic utility. BVP"). Vergleichen Sie den beschriebenen Lösungsweg mit dem Beweis zu Satz 3.5.

(b) Verändern Sie das Beispiel nun so, dass das inhomogene Dirichletproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 2\exp(y) & \text{in} \quad \Omega = [0,1]^2 \\ \qquad\qquad u = x(1-x)\exp(y) & \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

gelöst wird.

(c) Auf der Vorlesungshomepage finden Sie die Datei `Aufg26_Omega.py`, in der ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konstruiert wird, dessen Rand in die zwei Teilstücke Γ_1 und Γ_2 unterteilt ist. Lösen Sie das gemischte Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \sin(x^2) & \text{in} \quad \Omega \\ \quad u = (x+1)(y-1) & \text{auf} \quad \Gamma_1 \\ \partial_\nu u = \exp(x+y) & \text{auf} \quad \Gamma_2. \end{cases}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die Linearform für dieses Problem aussieht. Für deren Implementierung ist das Stichwort `definedon=...` hilfreich (siehe z.B. "1.5 Spaces and forms on subdomains").

Aufgabe 27:

Sei $\hat{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \le 1,\ x,y \ge 0\}$.

(a) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\hat{K},\ \mathcal{P}_{\hat{K}},\ \Sigma_{\hat{K}})$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\hat{K}} &= \mathbb{P}_2 = \text{ Polynome vom Grad } \le 2, \\ \Sigma_{\hat{K}} &= \text{ Punktauswertungen in den Ecken und den Seitenmittelpunkten.} \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\hat{K},\ \mathcal{P}_{\hat{K}},\ \Sigma_{\hat{K}})$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\hat{K}} &= \mathbb{P}_3 = \text{ Polynome vom Grad } \le 3, \\ \Sigma_{\hat{K}} &= \text{ Punktauswertungen in } x_i,\ i = 1, ..., 10 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{array}{llll} x_1 = (0,0), & x_4 = (1,0), & x_7 = (2/3, 1/3), & x_{10} = (0,1). \\ x_2 = (1/3, 0), & x_5 = (0, 1/3), & x_8 = (0, 2/3), & \\ x_3 = (2/3, 0), & x_6 = (1/3, 1/3), & x_9 = (1/3, 2/3), & \end{array}$$

Aufgabe 28:

(a) Sei $\hat{K}$ das Referenzdreieck und K ein beliebiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Leiten Sie aus den Koordinaten der Eckpunkte von K explizit eine affine Transformation her, also eine Abbildung $\boldsymbol{F} : \hat{K} \to K$ der Form $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$, so dass $K = \boldsymbol{F}(\hat{K})$.

(b) Wie können Sie für die Matrix $\boldsymbol{B}$ aus (a) garantieren, dass $\det(\boldsymbol{B}) > 0$?

(c) Übertragen Sie Ihre Vorgehensweise auf Tetraeder in $\mathbb{R}^3$.

(d) Geben Sie die bilineare Transformation an, die das Referenzquadrat auf ein beliebiges Viereck abbildet.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 05.06.2025.