Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
YANICK KIECHLE

14.05.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 19:

Wir betrachten Lagrange-Finite-Elemente erster Ordnung auf dem Gebiet Ω aus Abbildung 1 mit der dort angegebenen Triangulierung. Bestimmen Sie mit Hilfe der Vorüberlegungen von Aufgabe 15 für die Differentialgleichung aus Aufgabe 15 (b) die Steifigkeitsmatrix.

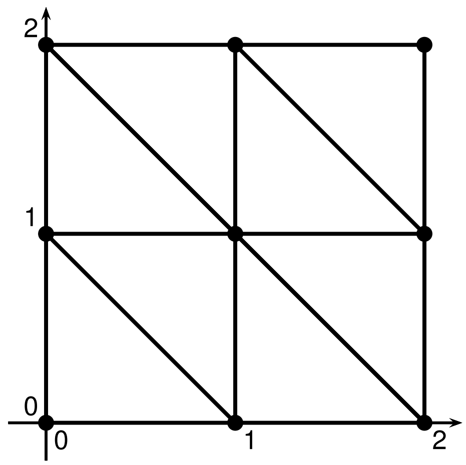

Abbildung 1: Gebiet mit Triangulierung für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix

Aufgabe 20:

Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Gebiet aus Abbildung 2 stückweise C^1-berandet ist.

Hinweis: Es muss kein formaler Beweis sein, die Idee dahinter reicht.

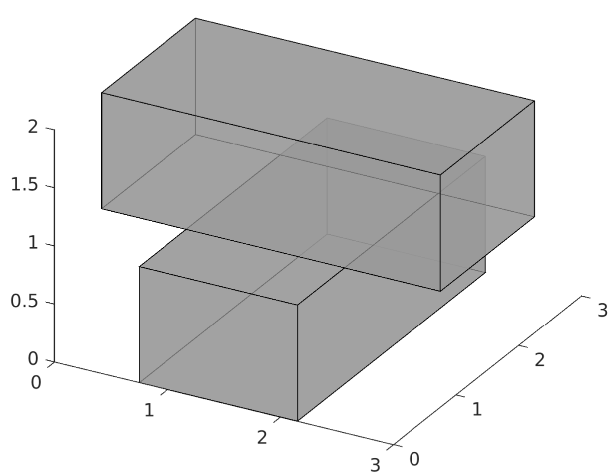

Abbildung 2: Stückweise C^1-berandetes Gebiet?

b.w.

Aufgabe 21:

Nach der Vorlesung wissen wir: $u \in H^1(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ bezüglich $x_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$, falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$\big(\varphi,\, \partial_i u\big)_0 = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i},\, u\right)_0 \qquad \text{für alle} \;\; \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Weiterhin bezeichnen wir für $u \in H^1(\Omega)$ und $(v_k)_k \to u$ in $H^1(\Omega)$ mit $v_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, mit dem L^2-Limes

$$\mathrm{D}_i\, u := \lim_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} v_k$$

die *verallgemeinerten Ableitungen* von u. Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1-Gebiete Ω:

(a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ eine schwache Ableitung.

(b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen schwache Ableitungen.

Aufgabe 22:

Es sei eine Triangulierung eines beschränkten Gebietes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion u, die auf jedem Dreieck C^1 ist, gegeben. Zeigen Sie:

$$u \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow u \in C(\overline{\Omega})$$

Hinweis: Aufgabe 20 (a).

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 22.05.2025.