Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
YANICK KIECHLE

7.05.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 15:

(a) Bestimmen Sie für die Dreiecke aus Abbildung 1 die linearen Basisfunktionen, die jeweils auf einer Ecke den Wert 1, auf den anderen beiden den Wert 0 annehmen.

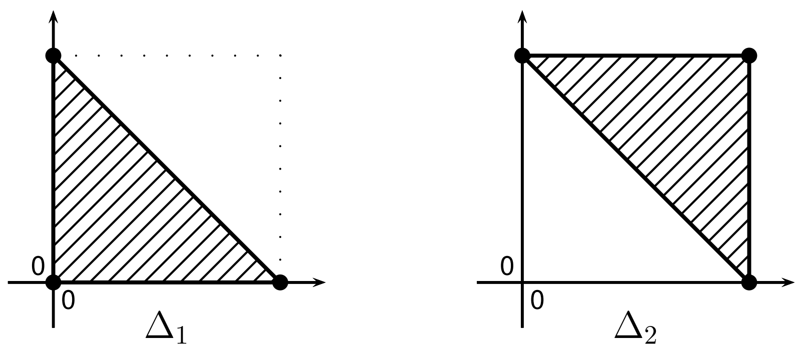

Figure 1: Dreiecke Δ_1 und Δ_2

(b) Bestimmen Sie für $\Omega = \Delta_1$ die (3×3)-Steifigkeitsmatrix $A = \big(a(\varphi_i, \varphi_j)\big)_{i,j}$ für die Differentialgleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Aufgabe 16:

Sei Ω ein Gebiet.

(a) Zeigen Sie, dass der Raum $C(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ nicht vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $C^1(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Wenn Sie möchten, können Sie für die Konstruktion Ihrer Gegenbeispiele annehmen, dass Ω ein reelles Intervall ist.

b.w.

Aufgabe 17:

In dieser Aufgabe werden wir mit Hilfe des Programms NETGEN dreidimensionale Geometrien bearbeiten und erstellen. Den Link zur Installationsanleitung von NGS-Py (bzw. NETGEN/NGSOLVE) finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

(a) Lesen Sie sich das Kapitel "Constructive Solid Geometry" in der NETGEN-Dokumentation von Joachim Schöberl durch, die unter https://github.com/NGSolve/netgen/blob/master/doc/ng4.pdf zu finden ist. Sehen Sie sich außerdem die `.geo`-Beispiele unter .../netgen/tree/master/tutorials in der NETGEN-GUI und in einem Texteditor an.

   Hinweis: Die `.geo`-Dateien wurden auch bei der Installation mit abgespeichert. Die Pfade, unter denen sie zu finden sind, stehen auf der NGS-Py-Seite unter "Getting started with NETGEN/NGSOLVE".

(b) Erstellen Sie nun die folgenden Geometrien, indem Sie vorhandene Beispiele ändern oder neue `.geo`-Dateien schreiben:

   (a) den Quader $[-1, 1] \times [0, 1] \times [1.5, 2]$ auf zwei verschiedene Arten, d.h als Schnitt von sechs Ebenen und direkt mit nur einem Befehl,

   (b) den Würfel $[0, 1]^3$ ohne den kleinere Würfel $[0.25, 0.75]^2 \times [0.5, 1]$ (das Beispiel `fichera.geo` ist hier hilfreich),

   (c) zwei ineinander verschlungene Tori (wie zwei Glieder einer Kette),

   (d) eine quadratische Pyramide mit Grundfläche $[-1, 1]^2$ und Höhe 1,

   (e) eine Tasse, natürlich befüllbar und mit einem Henkel.

Aufgabe 18:

(a) Zeigen Sie: Ist $\dim V < \infty$, dann gilt der Satz von Lax-Milgram auch, wenn man die Koerzivitätsbedingung durch die schwächere Voraussetzung $a(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ ersetzt.

(b) Sei ℓ^2 der Raum der quadratisch summierbaren Folgen, d. h. $\ell^2 := \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots) \mid \|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} < \infty\}$, mit der Norm $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$a : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n y_n,$$

   stetig und positiv definit, jedoch nicht ℓ^2-elliptisch ist.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 15.05.2025.