Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
YANICK KIECHLE

30.04.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 12:

Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| < 1,\ x < 0 \text{ oder } 0 < y\} \subseteq \mathbb{R}^2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{C}$.

Überlegen Sie sich, dass $u(x,y) \mathrel{\widehat{=}} u(x+iy) = \operatorname{Im}(w(z)) = \operatorname{Im}(z^{2/3})$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(e^{i\varphi}) = \sin(\frac{2}{3}\varphi), & \varphi \in [0, \frac{3}{2}\pi] \\ u = 0 & \text{sonst auf } \partial\Omega \end{cases}$$

erfüllt. Zeigen Sie weiterhin, dass ∇u auf Ω nicht beschränkt ist.

Aufgabe 13:

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) - q(x)u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega := (a,b) \\ \qquad u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

(a) Implementieren Sie eine Funktion `fd02(f,q,N,a,b)`, die mittels einer zentralen Finite Differenzen Approximation der zweiten Ableitung eine approximative Lösung `u` von Gleichung $(*)$ auf einem äquidistanten Gitter mit `N` Gitterpunkten berechnet.

(b) Implementieren Sie eine Funktion `fd04(f,q,N,a,b)`, die mittels des kompakten Finite Differenzen Verfahrens aus Aufgabe 9(b) eine approximative Lösung `u` von $(*)$ auf einem äquidistanten Gitter mit `N` Gitterpunkten berechnet.

Hierbei sind `f` und `q` jeweils (PYTHON)-Funktionen zur Auswertung von f und q und `a` und `b` die Randpunkte des Intervalls Ω.

(c) Testen Sie beide Funktionen an dem Beispiel

$$\begin{cases} -u''(x) - (1+4x^2)u(x) = 2\sin(x^2)\,(2\cos(x)x + \sin(x)) & \forall x \in (0,\pi) \\ \qquad u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

dessen exakte Lösung durch $u(x) = \sin(x)\cos(x^2)$ gegeben ist und vergewissern Sie sich, dass Sie die in Aufgabe 9 berechneten Konsistenzordnungen erhalten.

Aufgabe 14:

Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung mit inhomogenen Robin-Randbedingungen

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u + u = g \quad \text{auf } \Gamma, \tag{H}$$

wobei $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\Gamma)$ vorausgesetzt sind. Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) u ist Lösung von (H).

(b) Es gilt

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) \mathrm{d}(x,y) + \int_\Gamma uv \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}(x,y) + \int_\Gamma gv \, \mathrm{d}\sigma$$

für alle $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

(c) u ist Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2 \right] \mathrm{d}(x,y) + \frac{1}{2}\int_\Gamma v^2 \, \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega fv \, \mathrm{d}(x,y) - \int_\Gamma gv \, \mathrm{d}\sigma = \min!$$

unter allen $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

Hinweis: Sie benötigen für diese Aufgabe das Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe Aufgabe 5) weiterhin mit $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, aber diesmal Testfunktionen $g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 08.05.2025.