Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Yanick Kiechle

23.04.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9:

(a) Zeigen Sie, dass die lokale Approximation des Laplace-Operators in zwei Raumdimensionen durch den 5-Punkte-Stern die Konsistenzordnung 2 hat, d.h. dass die folgende Gleichung gilt:

$$\partial_{xx}u(x,y)+\partial_{yy}u(x,y) = \frac{-4u(x,y)+u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)}{h^2}+\mathcal{O}(h^2)$$

(b) Zeigen Sie, dass das kompakte Finite Differenzen Verfahren zur Approximation von $\partial_{xx}u(x)$

$$u(x-h)-2u(x)+u(x+h) \approx \frac{h^2}{12}\partial_{xx}u(x-h)+\frac{5h^2}{6}\partial_{xx}u(x)+\frac{h^2}{12}\partial_{xx}u(x+h)$$

die Konsistenzordnung 4 hat.

Aufgabe 10:

Für $\Omega = (0,1)^2$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Geben Sie die Matrix A und den Vektor b aus dem linearen Gleichungssystem

$$Ax = b$$

an, welches aus der Finite Differenzen Approximation obiger Gleichung mit einem regelmäßigen Gitter mit Gitterweite $h = \frac{1}{N+1}$ hervorgeht.

Aufgabe 11:

Beweisen Sie das diskrete Vergleichsprinzip, Korollar 3.3, aus der Vorlesung.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 08.05.2025.