Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
YANICK KIECHLE

16.04.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5:

Beweisen Sie das Fundamentallemma der Variationsrechnung. Das heißt, zeigen Sie, dass alle $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, mit offenem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, für die

$$\int_\Omega fg \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, g \in C(\Omega, \mathbb{R})$$

gilt, die Identität

$$f \equiv 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega$$

erfüllen.

Aufgabe 6: (EULER, 1779)

Sei das Variationsintegral

$$\mathcal{J}(u) := \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x$$

auf

$$\mathcal{V} := \left\{ u \in \mathrm{PC}^1\left[0,1\right] \mid u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

gegeben, wobei PC^1 der Raum der stetigen, stückweise stetig-differenzierbaren Funktionen ist.

(a) Raten Sie einen Minimierer u^* für $\mathcal{J}$.
Tipp: $\mathcal{J}(u^*) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Auf der kleineren Variationsklasse $\mathcal{V}^1 := \mathcal{V} \cap C^1[0,1]$ ist das Infimum des Funktionals immer noch 0, es wird allerdings von keiner C^1-Funktion angenommen.

Hinweis: Verwenden Sie in (b) Ihre Lösung aus (a), um eine Folge von stetigen Funktionen zu basteln. Hier kann das Newton-Schema helfen.

Aufgabe 7:

Sei $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel um den Ursprung mit Radius 1 und D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1/2, 0)$ und $(0, 1/2)$. Durch $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{\sim} \varphi(D) \subset \mathbb{S}_2$ mit

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}, \frac{(1-u^2)2v}{(1+u^2)(1+v^2)}, \frac{2u(1+v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \right)^T$$

sei eine Karte von $\mathbb{S}_2$ gegeben.
Berechnen Sie für $f : \mathbb{S}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x$, das Integral

$$\int_{\varphi(D)} f(x,y,z) \,\mathrm{d}S(x,y,z).$$

Hinweis: Sie können die notwendigen Berechnungen per Python, Maple, etc. durchführen. Geben Sie aber die Jacobimatrix $\mathrm{D}\varphi$, die Matrix $G = (g_{ij})_{i,j=1}^2$ sowie deren Determinante g an.

b.w.

Aufgabe 8:

Beweisen Sie die Green'schen Formeln aus der Vorlesung:

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle + v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\partial_\nu u \,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

und

$$\int_\Omega v\Delta u - u\Delta v \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\partial_\nu u - u\partial_\nu v \,\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

mit $\Gamma = \partial\Omega$, dem äußeren Normalenvektorfeld $\vec{\nu} : \Gamma \to \mathcal{S}^n$ und der äußeren Normalenableitung $\partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u$.

Welche Voraussetzungen benötigen Sie um den Gaußschen Integralsatz anwenden zu können?

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 24.04.2024.