Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Yanick Kiechle

2.07.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 41:

Zeigen Sie Lemma (4.3), d.h. zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\lVert\!| \cdot |\!\rVert_s$ ist tatsächlich eine Norm.

(b) $\lVert\!| x |\!\rVert_s \le \lVert\!| x |\!\rVert_r^{1/2} \cdot \lVert\!| x |\!\rVert_t^{1/2}$ für $s = \frac{t+r}{2}$ und alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Aufgabe 42:

Für die durch die Steifigkeitsmatrix definierten Normen $\lVert\!| \cdot |\!\rVert_s$ ist Ihnen bekannt, dass

$$\lVert\!| v_h |\!\rVert_1^2 \le \lVert\!| v_h |\!\rVert_0 \cdot \lVert\!| v_h |\!\rVert_2 \qquad \text{für alle} \qquad v_h \in V_h.$$

Zeigen Sie, dass für die Sobolev-Normen entsprechend auf einem stückweise C^1-berandetem Gebiet gilt: Es gibt eine Konstante c, so dass

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 \le c\,\|v\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{2,\Omega} \qquad \text{für alle} \qquad v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{mit } \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \ge 2.$$

Geben Sie c explizit an.

Aufgabe 43:

Sei $L > 0$ ein festes feinstes Level und sei $u_L^{(k)} \mapsto u_L^{(k+1)}$ ein Schritt des Mehrgitterverfahrens. Mehrgitterverfahren sind lineare Iterationen, d. h. es gibt eine Iterationsmatrix $G \in \mathbb{R}^{N_L \times N_L}$, so dass für den Fehler $e_L^{(k)} = u_L - u_L^{(k)}$ gilt $e_L^{(k+1)} = G\,e_L^{(k)}$.

(a) Geben Sie die Iterationsmatrix G für das Zweigitterverfahren (also $L = 1$) explizit an. Gehen Sie dabei den Zweigitteralgorithmus Schritt für Schritt durch, wobei Sie folgendes beachten:

  (i) Verwenden Sie ν_1 Schritte des gedämpften Jacobi-Verfahrens als Vorglätter, dessen Iterationsmatrix durch $S := I - \omega D^{-1} A$ gegeben ist (vgl. Beobachtung (1.7)). Zeigen Sie hierbei, dass mit $u = A^{-1} b$ gilt
  $$\mathcal{L}_\omega^{\nu_1} u^{(k)} = S^{\nu_1} u^{(k)} + (I - S^{\nu_1}) u,$$
  wobei die Abbildung $\mathcal{L}_\omega$ einen Glättungsschritt mit obigem Verfahren darstellt.

  (ii) Führen Sie nach der Korrektur (Schritt 4) noch eine Nachglättung des Ergebnisses durch, d.h. glätten Sie Ihr Ergebnis am Ende mit ν_2 Schritten des gedämpften Jacobi-Verfahrens.

(b) Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Spektralradius von G nur von der Summe der Glättungsschritte $\nu_1 + \nu_2$ abhängt, nicht aber von der Anzahl der Vor- bzw. Nachglättungsschritte (ν_1 bzw. ν_2) einzeln.

Aufgabe 44:

Sei A symmetrisch und positiv definit. Überlegen Sie sich, für welche θ die Richardson-Iteration

$$x^{(k+1)} = (I - \theta A) x^{(k)} + \theta b$$

gegen $\widehat{x} = A^{-1} b$ konvergiert.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 10.07.2025.