Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
YANICK KIECHLE

25.06.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 37:

Finden Sie die Eigenvektoren zu den nicht-Null Eigenwerten der Gauß-Seidel Iterationsmatrix G für das in der Vorlesung betrachtete Modellproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2 \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 38:

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ strikt diagonaldominant, d.h.

$$\max_{i=1,\dots,n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

Zeigen Sie, dass sowohl das Jacobi- als auch das Gauß-Seidel-Verfahren angewandt auf $Ax = b$ bei beliebigem Startwert x_0 und für jede rechte Seite b gegen $A^{-1}b$ konvergiert.

Aufgabe 39:

Implementieren Sie sowohl das Jacobi-Verfahren als auch das Gauß-Seidel-Verfahren zum Lösen von

$$Ax = b.$$

A sei dabei die Finite Differenzen Approximation an den Laplace Operator auf $[0,1]^3$ mit Gitterweite $h = 1/(m+1)$, $m = 49$, mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Wählen Sie $b = 0$ und $x^{(0)}$ als Array der Größe m^3 mit Zufallszahlen aus $[0,1)$. Führen Sie jeweils $k = 200$ Iterationen durch. Plotten Sie den Logarithmus der Fehler gegen die Anzahl der Iterationen.

Hinweis: Gestalten Sie den Algorithmus möglichst effizient, es könnte sonst sein, dass Sie sehr lange auf das Ergebnis warten müssen (Stichwort: `sparse`).

Aufgabe 40:

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des durch Finite Differenzen auf $[0,1]^2$ diskretisierten Laplace-Operators mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Als Schrittweite in x- und y-Richtung sei wie immer $h = \frac{1}{m+1}$ gewählt.

Hinweis: Benutzen Sie Ihr Wissen über die Eigenwerte der Jacobi-Iterationsmatrix.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = \left(I - \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} A_h \right) x^{(k)} + \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} b_h$$

im Modellproblem aus (a) für ausreichend große m der mit $\omega = 1/2$ gedämpften Jacobi-Iteration nähert.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 3.07.2025.