Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Yanick Kiechle

11.06.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 10. Übungsblatt

Aufgabe 33:

Sei $I = [a, b],\ a < b$, ein reelles Intervall. Die Vorschrift $u \mapsto \omega_I(u) := \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ definiert ein Funktional ω_I auf $L^1(I)$. Wie üblich sei N_x die Punktauswertung an der Stelle x (definiert für stetige Funktionen).

(a) Zeigen Sie, dass $(I,\ \mathbb{P}_2(I),\ \Sigma)$ ein finites Element ist, falls $\Sigma = \{N_a,\ N_b,\ \omega_I\}$. Bestimmen Sie die nodale Basis von $\mathbb{P}_2(I)$.

(b) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{N_a,\ \omega_I\}$. Zeigen Sie, dass $(I,\ \mathbb{P}_1(I),\ \widetilde{\Sigma})$ ein finites Element ist. Wieso ist das Tripel $(I,\ \mathbb{P}_1(I),\ \widetilde{\widetilde{\Sigma}})$ mit $\widetilde{\widetilde{\Sigma}} = \{N_{(a+b)/2},\ \omega_I\}$ kein finites Element?

(c) Seien nun $\hat{I} = [0, 1]$ und $\widehat{\Sigma} = \{\omega_{[0,2/3]},\ \omega_{[1/3,1]}\}$. Ist $(\hat{I},\ \mathbb{P}_1(\hat{I}),\ \widehat{\Sigma})$ ein finites Element?

Aufgabe 34:

Beweisen Sie Lemma (4.5), d.h. zeigen Sie: Unter den Voraussetzungen von Lemma (4.3) gilt

$$\|v - \Pi v\|_{0,K} \leq C h^2 |v|_{2,K} \qquad \forall v \in H^2(K).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für das Referenzdreieck. Leiten Sie dann daraus die allgemeingültige Abschätzung her.

Aufgabe 35:

Zeigen Sie:

(a) Ist $T : V \to W$ ein linearer, beschränkter Operator und $\dim(\mathrm{im}(T)) < \infty$, so ist T kompakt.

(b) Ist Ω beschränkt, stückweise C^1-berandet und $\mathcal{T}_n$ eine Triangulierung von Ω. Dann ist

$$T_n \ :\ H^1(\Omega) \to L^2(\Omega),\ v|_{K_i} \mapsto M_{K_i}(v)$$

kompakt. Dabei seien $\{K_i \mid i \in I_n\} = \mathcal{T}_n$ die Dreiecke der Triangulierung und M_{K_i} der Mittelwert-Operator aus Lemma (4.1).

Aufgabe 36:

(a) Erweitern Sie die Implementierung von Aufgabe 26 (b) (die Musterlösung im GitLab Repository) um eine Schleife, in der der Fehler in der L_2- und der H_1-Norm berechnet wird und das Gitter nach jedem Durchlauf gleichmäßig verfeinert wird, in dem Sie den Befehl `mesh.Refine()` verwenden. Für das erste Gitter soll hierbei `maxh=0.8` gesetzt werden, es sollte auch nicht mehr als viermal verfeinert werden. Vergleichen Sie jeweils in beiden Normen den Fehler bzgl. eines Gitters mit dem bzgl. des nächstfeineren Gitters.
Lassen Sie die Schleife auch mit Finiten Elementen höherer Ordnung durchlaufen.

(b) Wenden Sie das gleiche Vorgehen auf das Beispiel aus Aufgabe 12 an:

   (a) Konstruieren Sie das Gebiet Ω. Achten Sie hierbei auf die Zerlegung von $\partial\Omega$ in Γ_1 und Γ_2 entsprechend den Randbedingungen, vgl. `Aufg26_Omega.py` auf der Homepage.

(b) Verändern Sie Ihre Implementierung von Teil (a) nun so, dass jetzt das Randwertproblem aus Aufgabe 12 gelöst wird. Auf der Homepage finden Sie dazu eine Python-Datei mit der Funktion `arg(x,y)`, die für die Polarkoordinaten-Darstellung der NGSolve - *CoefficientFunctions* `x` und `y` den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ ausgibt.

(c) Verändern Sie die Ordnung der Finiten Elemente und vergleichen Sie die Fehler. Was fällt Ihnen auf?

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 26.06.2025.