Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
YANICK KIECHLE

08.04.2025

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y''(x) &= 100y(x) + z(x) \\ z'(x) &= \sin(y(x)) + x \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 1 \\ z(0) &= z(1) \end{aligned}$$

Transformieren Sie dieses System auf Standardform

$$\mathcal{Y}'(x) = f(x, \mathcal{Y}), \qquad r(\mathcal{Y}(0), \mathcal{Y}(1)) = 0.$$

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das Randwertproblem: Finde $y : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} y''(x) &= c\sqrt{1 + y'(x)^2} \quad \text{für } x \in (0,1), \\ y'(0) &= 0, \\ y(1) &= h. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$y(x) = \kappa + \tfrac{1}{c}\cosh(cx)$$

obiges Randwertproblem löst, wobei Sie κ passend bestimmen.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie allgemeine, stetige Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x, y, t) \mapsto u(x, y, t)$, der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(a) $\frac{\partial}{\partial x} u = 17$, (b) $\frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 6y$, (c) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 2$.

Beispiel: Die allgemeine Lösung von $\frac{\partial}{\partial t} u = 0$ ist

$$u(x, y, t) = v(x, y) \text{ mit } v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2) \text{ beliebig.}$$

b.w.

Aufgabe 4:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Für jede beliebige Teilmenge $V \subset \Omega$ gelte die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V w(\boldsymbol{x}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_V f(\boldsymbol{x}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial V} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

Hier seien $w : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die gespeicherte Wärmeenergie (der Wärmeinhalt), $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Wärmequelle sowie $\boldsymbol{q} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$ der Wärmestrom/-fluss und $\boldsymbol{n}$ die äußere Normale $\boldsymbol{n} : \partial V \to \mathbb{S}^2$.

(a) Zeigen Sie mithilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass in $\Omega \times \mathbb{R}_+$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} w - f + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = 0.$$

Nennen Sie die dazu notwendigen Voraussetzungen.

(b) Es sei $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ die Temperatur (in Kelvin). Mit der Dichte ρ und der spezifischen Wärmekapazität c gilt $w = \rho c u$. Darüber hinaus beschreibt das Fouriersche Gesetz den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärmestrom durch

$$\boldsymbol{q} = -k \nabla u,$$

wobei k die Wärmeleitfähigkeit des Materials ist. Leiten Sie aus diesen Angaben und Teil (a) eine partielle Differentialgleichung für u her. Nehmen Sie dazu an, dass k, ρ und c konstant sind.

Besprechung in der Übung am Dienstag, 15.04.2024.