Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. MARINA FISCHER

23.05.2023

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 29:

(a) Sei $\widehat{K}$ das Referenzdreieck und K ein beliebiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Leiten Sie aus den Koordinaten der Eckpunkte von K explizit eine affine Transformation her, also eine Abbildung $\boldsymbol{F} : \widehat{K} \to K$ der Form $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$, so dass $K = \boldsymbol{F}(\widehat{K})$.

(b) Wie können Sie für die Matrix $\boldsymbol{B}$ aus (a) garantieren, dass $\det(\boldsymbol{B}) > 0$?

(c) Übertragen Sie Ihre Vorgehensweise auf Tetraeder in $\mathbb{R}^3$.

(d) Geben Sie die bilineare Transformation an, die das Referenzquadrat auf ein beliebiges Viereck abbildet.

Aufgabe 30:

Überlegen Sie sich, dass die Quadraturformel

(a)
$$\sum_{i=1}^{3} b_i f(c_i) \quad \text{mit} \quad b_i = 1/6 \ \text{ für } \ i = 1,2,3 \quad \text{und} \quad c_1 = (1/2, 0),\ c_2 = (0, 1/2),\ c_3 = (1/2, 1/2)$$

exakt für Polynome in $\mathbb{P}_2$ auf dem Referenzdreieck ist und

(b)
$$\sum_{i=1}^{4} b_i f(c_i) \quad \text{mit} \quad b_i = 1/4 \quad \text{und} \quad c_i = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad \text{für} \ \ i = 1, \ldots, 4$$

exakt für Polynome in $\mathbb{Q}_3$ auf dem Referenzquadrat ist.

Aufgabe 31:

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Operator

$$L \ : \ H^1(\widehat{K}) \ \longrightarrow \ L^2(\widehat{K}), \quad v \ \longmapsto \ \int_0^1 v(t,0)\,\mathrm{d}t$$

ein linearer, stetiger Operator ist.

Aufgabe 32:

Sei $I = [a,b]$, $a < b$, ein reelles Intervall. Die Vorschrift $u \mapsto \omega_I(u) := \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ definiert ein Funktional ω_I auf $L^1(I)$. Wie üblich sei N_x die Punktauswertung an der Stelle x (definiert für stetige Funktionen).

(a) Zeigen Sie, dass $(I,\ \mathbb{P}_2(I),\ \Sigma)$ ein finites Element ist, falls $\Sigma = \{N_a,\ N_b,\ \omega_I\}$. Bestimmen Sie die nodale Basis von $\mathbb{P}_2(I)$.

(b) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{N_a,\ \omega_I\}$. Zeigen Sie, dass $(I,\ \mathbb{P}_1(I),\ \widetilde{\Sigma})$ ein finites Element ist. Wieso ist das Tripel $(I,\ \mathbb{P}_1(I),\ \widetilde{\widetilde{\Sigma}})$ mit $\widetilde{\widetilde{\Sigma}} = \{N_{(a+b)/2},\ \omega_I\}$ kein finites Element?

(c) Seien nun $\hat{I} = [0,1]$ und $\widehat{\Sigma} = \{\omega_{[0,2/3]},\ \omega_{[1/3,1]}\}$. Ist $(\hat{I},\ \mathbb{P}_1(\hat{I}),\ \widehat{\Sigma})$ ein finites Element?

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 01.06.2023.