

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 25:

- (a) Lesen und verstehen Sie das Beispiel “1.3 Dirichlet boundary conditions” auf der NGS-Py-Homepage (ohne den letzten Teil “The automatic utility. BVP”). Vergleichen Sie den beschriebenen Lösungsweg mit dem Beweis zu Satz 3.5.
- (b) Verändern Sie das Beispiel nun so, dass das inhomogene Dirichletproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 2 \exp(y) & \text{in } \Omega = [0, 1]^2 \\ u = x(1 - x) \exp(y) & \text{auf } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

gelöst wird.

- (c) Auf der Vorlesungshomepage finden Sie die Datei `Aufg25_Omega.py`, in der ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konstruiert wird, dessen Rand in die zwei Teilstücke Γ_1 und Γ_2 unterteilt ist. Lösen Sie das gemischte Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \sin(x^2) & \text{in } \Omega \\ u = (x + 1)(y - 1) & \text{auf } \Gamma_1 \\ \partial_\nu u = \exp(x + y) & \text{auf } \Gamma_2. \end{cases}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die Linearform für dieses Problem aussieht. Für deren Implementierung ist das Stichwort `definedon=...` hilfreich (siehe z.B. “1.5 Spaces and forms on subdomains”).

Aufgabe 26:

Für $K \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$\mathbb{Q}_1(K) := \{v \in C(K) \mid v : (x, y) \mapsto a + bx + cy + dxy, \text{ wobei } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Sei $T = [0, 1]^2$ das Einheitsquadrat und $\Sigma = \{\text{Punktauswertungen in den Ecken}\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T, \mathbb{Q}_1(T), \Sigma)$ ein finites Element ist und bestimmen Sie die nodale Basis. (Dieses Element heißt “bilinear”, weil die Formfunktionen linear auf jeder Kante sind.)
- (b) Sei nun $\tilde{\Sigma} = \{\text{Punktauswertungen in den Kantenmittelpunkten}\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T, \mathbb{Q}_1(T), \tilde{\Sigma})$ kein finites Element ist.

Aufgabe 27:

Sei $\hat{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$.

(a) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\hat{K}, \mathcal{P}_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ mit

$$\mathcal{P}_{\hat{K}} = \mathbb{P}_2 = \text{Polynome vom Grad } \leq 2,$$

$$\Sigma_{\hat{K}} = \text{Punktauswertungen in den Ecken und den Seitenmittelpunkten.}$$

(b) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\hat{K}, \mathcal{P}_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ mit

$$\mathcal{P}_{\hat{K}} = \mathbb{P}_3 = \text{Polynome vom Grad } \leq 3,$$

$$\Sigma_{\hat{K}} = \text{Punktauswertungen in } x_i, i = 1, \dots, 10$$

mit

$$\begin{array}{llll} x_1 = (0, 0), & x_4 = (1, 0), & x_7 = (2/3, 1/3), & x_{10} = (0, 1). \\ x_2 = (1/3, 0), & x_5 = (0, 1/3), & x_8 = (0, 2/3), & \\ x_3 = (2/3, 0), & x_6 = (1/3, 1/3), & x_9 = (1/3, 2/3), & \end{array}$$

Aufgabe 28:

Sei K ein Dreieck in \mathbb{R}^2 mit den Eckpunkten $\{z_i\}_{i=1,2,3}$ und dem Schwerpunkt z_4 . Für eine hinreichend glatte Funktion f und einen Punkt z sei $N_z f := f(z)$ die Punktauswertung von f in z . Weiter seien $N_z^x f := \frac{\partial}{\partial x} f(z)$ bzw. $N_z^y f := \frac{\partial}{\partial y} f(z)$ die Punktauswertungen der partiellen Ableitung von f in x - bzw. y -Richtung in z (siehe Beispiel (1.8)).

Zeigen Sie, dass $(K, \mathbb{P}_3(K), \Sigma)$ ein finites Element ist, falls

$$\Sigma = \{N_{z_i}\}_{i=1,2,3,4} \cup \{N_{z_i}^x\}_{i=1,2,3} \cup \{N_{z_i}^y\}_{i=1,2,3}.$$