Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Marina Fischer

02.05.2023

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 17:

Wir betrachten Lagrange-Finite-Elemente erster Ordnung auf dem Gebiet Ω aus Abbildung 1 mit der dort angegebenen Triangulierung. Bestimmen Sie mit Hilfe der Vorüberlegungen von Aufgabe 14 für die Differentialgleichung aus Aufgabe 14 (b) die Steifigkeitsmatrix.

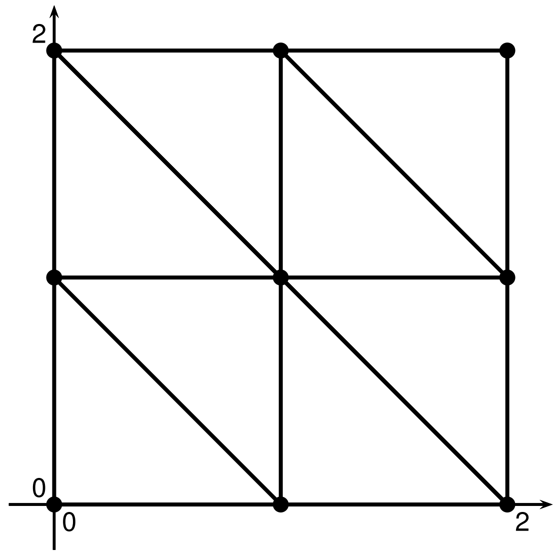

Abbildung 1: Gebiet mit Triangulierung für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix

Aufgabe 18:

(a) Zeigen Sie: Ist $\dim V < \infty$, dann gilt der Satz von Lax-Milgram auch, wenn man die Koerzivitätsbedingung durch die schwächere Voraussetzung $a(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ ersetzt.

(b) Sei ℓ^2 der Raum der quadratisch summierbaren Folgen, d. h. $\ell^2 := \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \mid \|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} < \infty\}$, mit der Norm $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$a : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n y_n,$$

stetig und positiv definit, jedoch nicht ℓ^2-elliptisch ist.

b.w.

Aufgabe 19:

Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Gebiet aus Abbildung 2 stückweise C^1-berandet ist.

Hinweis: Es muss kein formaler Beweis sein, die Idee dahinter reicht.

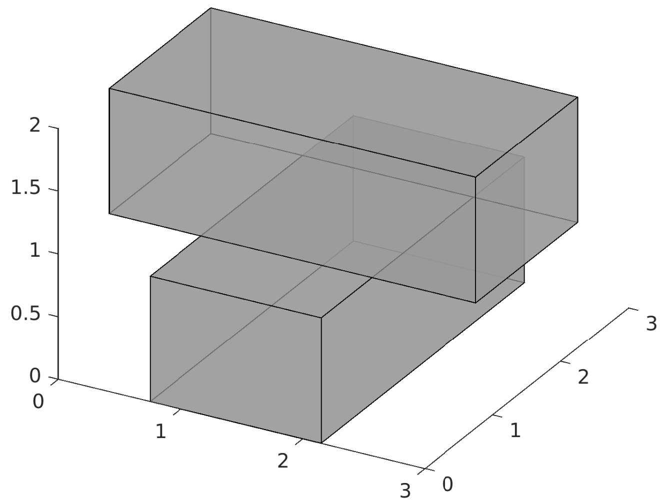

Abbildung 2: Stückweise C^1-berandetes Gebiet?

Aufgabe 20:

Nach der Vorlesung wissen wir: $u \in H^1(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ bezüglich $x_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$, falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$\big(\varphi,\, \partial_i u\big)_0 = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i},\, u\right)_0 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Weiterhin bezeichnen wir für $u \in H^1(\Omega)$ und $(v_k)_k \to u$ in $H^1(\Omega)$ mit $v_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, mit dem L^2-Limes

$$\mathrm{D}_i\, u := \lim_{k \to \infty} \frac{\partial}{\partial x_i} v_k$$

die *verallgemeinerten Ableitungen* von u. Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1-Gebiete Ω:

(a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ eine schwache Ableitung.

(b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen schwache Ableitungen.

Besprechung in der Übung am Donnerstag, 11.05.2023.